

## K1.

Sievennetään lauseke CAS-laskimella.

$$\begin{aligned}(x^2 - 7x)^2(-7x^5 + 9x^3 - 5x^2) + (3x^3 - 2x^2)^2 \\ = -7x^9 + 98x^8 - 334x^7 - 122x^6 + 499x^5 - 241x^4\end{aligned}$$

- a) Muuttujan  $x$  korkein eksponentti on 9, joten polynomin asteluku on 9.
- b) Toiseksi korkeimman asteen termi on  $98x^8$ . Termin kerroin on 98.
- c) Neljännen asteen termi on  $-241x^4$ .
- d) Vakiotermi on 0.

### Vastaus

- a) 9
- b) 98
- c)  $-241x^4$
- d) 0

## K2.

a) Muodostetaan polynomien summa.

$$\begin{aligned}(7x^2 - 3x + 1) + (-6x^2 + 3x - 8) & \quad \text{Poistetaan sulkeet. Kun sulkeiden} \\ & \quad \text{edessä on plusmerkki, termien} \\ & \quad \text{etumerkit säilyvät ennallaan.} \\ = 7x^2 - 3x + 1 - 6x^2 + 3x - 8 & \quad \text{Yhdistetään samanmuotoiset termit.} \\ = x^2 - 7\end{aligned}$$

b) Muodostetaan polynomien erotus.

$$\begin{aligned}(7x^2 - 3x + 1) - (-6x^2 + 3x - 8) & \quad \text{Poistetaan sulkeet. Kun sulkeiden} \\ & \quad \text{edessä on miinusmerkki, termien} \\ & \quad \text{etumerkit vaihtuvat.} \\ = 7x^2 - 3x + 1 + 6x^2 - 3x + 8 & \quad \text{Yhdistetään samanmuotoiset termit.} \\ = 13x^2 - 6x + 9\end{aligned}$$

### Vastaus

a)  $(7x^2 - 3x + 1) + (-6x^2 + 3x - 8) = x^2 - 7$

b)  $(7x^2 - 3x + 1) - (-6x^2 + 3x - 8) = 13x^2 - 6x + 9$

### K3.

a) Muodostetaan polynomien tulo.

$$\begin{aligned}(5x - 7) \cdot (4x - 3) & \quad \text{Kerrotaan sulkeet auki.} \\= 5x \cdot 4x + 5x \cdot (-3) + (-7) \cdot 4x + (-7) \cdot (-3) \\= 20x^2 - 15x - 28x + 21 & \quad \text{Yhdistetään samanmuotoiset termit.} \\= 20x^2 - 43x + 21\end{aligned}$$

b) Muodostetaan polynomin neliö.

$$\begin{aligned}(3x + 2)^2 \\= (3x + 2)(3x + 2) & \quad \text{Kerrotaan sulkeet auki.} \\= 3x \cdot 3x + 3x \cdot 2 + 2 \cdot 3x + 2 \cdot 2 \\= 9x^2 + 6x + 6x + 4 & \quad \text{Yhdistetään samanmuotoiset termit.} \\= 9x^2 + 12x + 4\end{aligned}$$

#### Vastaus

a)  $(5x - 7) \cdot (4x - 3) = 20x^2 - 43x + 21$

b)  $(3x + 2)^2 = 9x^2 + 12x + 4$

## K4.

a)

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$a = 1, \quad b = -4 \quad \text{ja} \quad c = -5$$

$$= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm 6}{2}$$

Lasketaan ratkaisujen arvot yksitellen.

$$x = \frac{4+6}{2} = \frac{10}{2} = 5 \quad \text{tai} \quad x = \frac{4-6}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

b)

$$3x^2 - 6 = 7x$$

$$|-7x$$

Muokataan yhtälö muotoon, jossa termit ovat vasemmalla puolella ja nolla oikealla puolella.

$$3x^2 - 7x - 6 = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$a = 3, \quad b = -7 \quad \text{ja} \quad c = -6$$

$$= \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-6)}}{2 \cdot 3}$$

$$= \frac{7 \pm \sqrt{121}}{6}$$

$$= \frac{7 \pm 11}{6}$$

Lasketaan ratkaisujen arvot yksitellen.

$$x = \frac{7+11}{6} = \frac{18}{6} = 3 \quad \text{tai} \quad x = \frac{7-11}{6} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$$

### Vastaus

a)  $x = -1$  tai  $x = 5$

b)  $x = -\frac{2}{3}$  tai  $x = 3$

## K5.

a)

$$5x^2 = 2x \quad | -2x$$

Muokataan yhtälö muotoon, jossa termit ovat vasemmalla puolella ja nolla oikealla puolella.

$$5x^2 - 2x = 0$$

Tunnistetaan yhteinen tekijä  $x$ .

$$5x \cdot x - 2 \cdot x = 0$$

Erotetaan yhteinen tekijä  $x$ .

$$x \cdot (5x - 2) = 0$$

Käytetään tulon nollasääntöä.

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad 5x - 2 = 0 \quad | +2$$

Ratkaistaan molemmista yhtälöistä  $x$ .

$$5x = 2 \quad | :5$$

$$x = \frac{2}{5}$$

b)

$$5x^2 = 2x - 1 \quad | -2x + 1$$

Muokataan yhtälö muotoon, jossa termit ovat vasemmalla puolella ja nolla oikealla puolella.

$$5x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$a = 5, \quad b = -2 \quad \text{ja} \quad c = 1$$

$$= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 1}}{2 \cdot 5}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{10}$$

Koska  $\sqrt{-16}$  ei ole määritelty, yhtälöllä ei ole ratkaisuja

### Vastaus

a)  $x = 0$  tai  $x = \frac{2}{5}$

b) ei ratkaisuja

## K6.

a) Muodostetaan ja sievennetään erotusfunktio  $h$ .

$$\begin{aligned}h(x) &= f(x) - g(x) & f(x) &= 3x^2 - 2x, \quad g(x) = 2x^2 + 35 \\&= (3x^2 - 2x) - (2x^2 + 35) \\&= 3x^2 - 2x - 2x^2 - 35 \\&= x^2 - 2x - 35\end{aligned}$$

b) Ratkaistaan, millä muuttujan  $x$  arvolla funktion  $h$  arvo on nolla.

$$\begin{aligned}h(x) &= 0 \\x^2 - 2x - 35 &= 0 & ax^2 + bx + c &= 0 \\x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} & a &= 1, \quad b = -2 \quad \text{ja} \quad c = -35 \\&= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-35)}}{2 \cdot 1} \\&= \frac{2 \pm \sqrt{144}}{2} \\&= \frac{2 \pm 12}{2} & \text{Lasketaan ratkaisujen arvot yksitellen.} \\x &= \frac{2+12}{2} = \frac{14}{2} = 7 \quad \text{tai} \quad x = \frac{2-12}{2} = \frac{-10}{2} = -5\end{aligned}$$

### Vastaus

a)  $h(x) = (3x^2 - 2x) - (2x^2 + 35) = x^2 - 2x - 35$

b)  $x = -5$  tai  $x = 7$

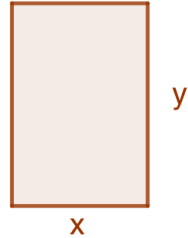
## K7.

a)

Piirretään mallikuva. Merkitään pelikentän yhden sivun pituutta kirjaimella  $x$  ja toisen sivun pituutta  $y$ .

Verkkoaitaa käytetään 164 metriä. Muodostetaan yhtälö ja pelikentän sivun pituus  $y$ .

$$2x + 2y = 164 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$
$$y = 82 - x$$



Muodostetaan funktio  $A(x)$ .

$$A(x) = x \cdot (82 - x) = 82x - x^2$$

b) Lasketaan pelikentän pinta-ala, kun sivun pituus  $x = 25$ .

$$A(25) = 82 \cdot 25 - 25^2 = 1425 \text{ (m}^2\text{)}$$

c) Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan pelikentän sivun pituus  $x$ .

$$A(x) = 1600$$

$$82x - x^2 = 1600 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$x = 32 \text{ (m)} \quad \text{tai} \quad x = 50 \text{ (m)}$$

Kun sivun pituus on  $x = 32 \text{ m}$ ,  
toisen sivun pituus  $y = 82 - 32 = 50 \text{ (m)}$ .

Kun sivun pituus  $x = 50 \text{ m}$ ,  
toisen sivun pituus  $y = 82 - 50 = 32 \text{ (m)}$ .

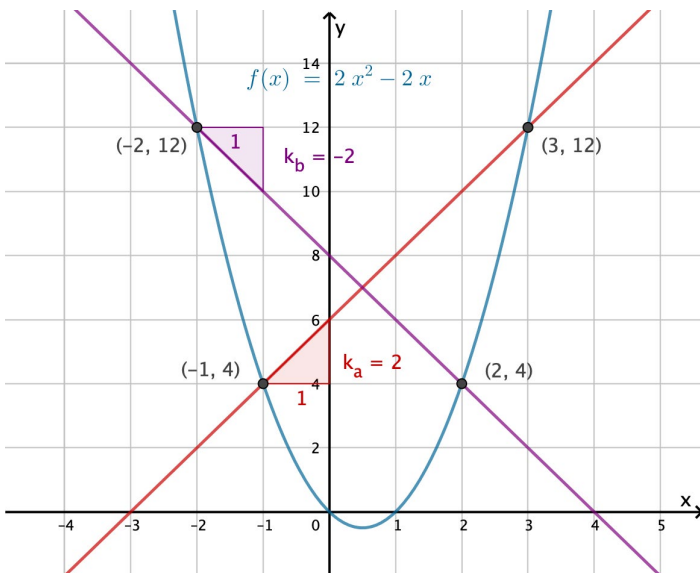
### Vastaus

a)  $A(x) = x \cdot (82 - x) = 82x - x^2$

b)  $1425 \text{ m}^2$

c) sivujen pituudet ovat 32 m ja 50 m

## K8.



Määritetään funktion  $f(x) = 2x^2 - 2x$  kuvaajalle annetulle välille piirretyn sekantin kulmakerroin.

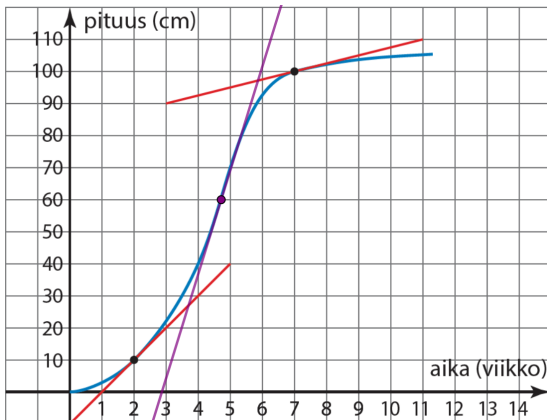
- a) Välillä  $-1 \leq x \leq 3$  funktion keskimääräinen muutosnopeus on 2.
- b) Välillä  $-2 \leq x \leq 2$  funktion keskimääräinen muutosnopeus on  $-2$ .

### Vastaus

- a) 2
- b)  $-2$



## K9.



Määritetään tangenttien kulmakeroimet.

a) Kohdassa  $x = 2$  viikkoa kasvunopeus on

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{20 - 10}{3 - 2} = 10 \text{ (cm/viikko)}.$$

Kohdassa  $x = 7$  viikkoa kasvunopeus on

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{110 - 90}{11 - 3} = \frac{20}{8} \approx 2,5 \text{ (cm/viikko)}.$$

b) Käyrälle piirretty tangentti näyttäisi olevan jyrkin kohdassa  $x \approx 4,7$ .  
Suurin kasvunopeus on siis kohdassa  $x \approx 4,7$  viikkoa.

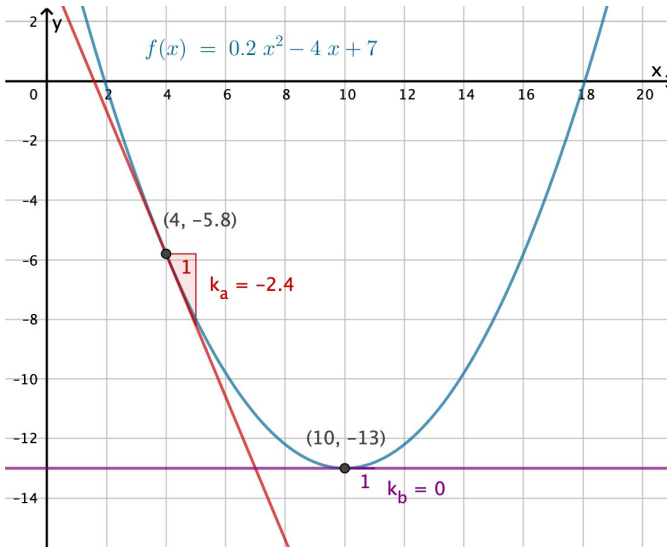
$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{100 - 0}{6 - 3} = \frac{100}{3} \approx 33 \text{ (cm/viikko)}.$$

### Vastaus

- a) 2 viikon kuluttua 10 cm/viikko, 7 viikon kuluttua 0,7 cm/viikko  
b) kasvu on nopeinta noin 4,7 viikon kuluttua, kasvunopeus silloin noin 33 cm/viikko

## K10.

Määritetään funktion  $f(x) = 0,2x^2 - 4x + 7$  kuvaajalle annettuihin kohtiin piirrettyjen tangenttien kulmakertoimet.



a) kohdassa  $x = 4$  funktion hetkellinen muutosnopeus on  $-2,4$ .

b) kohdassa  $x = 10$  funktion hetkellinen muutosnopeus on  $0$ .

### Vastaus

a)  $-2,4$

b)  $0$

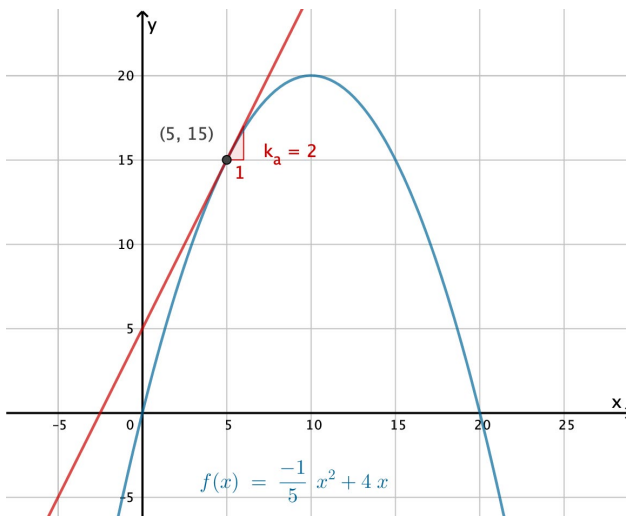
## K11.

- a) Funktion  $f(x) = -\frac{1}{5}x^2 + 4x$  derivaatta kohdassa 5 on funktion kuvaajalle kohtaan  $x = 5$  piirretyn tangentin kulmakerroin.

Piirretään funktion  $f$  kuvaaja ja merkitään kuvaajalle piste kohtaan  $x = 5$ .

Piirretään kuvaajalle tangentti kohtaan  $x = 5$ .

Määritetään tangentin kulmakerroin.



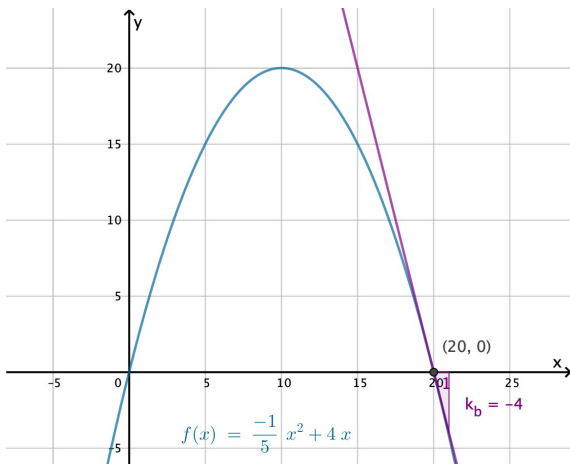
Tangentin kulmakertoimeksi saadaan 2. Siten  $f'(5) = 2$ .

- b) Funktion derivaatta  $f'(20)$  on funktion kuvaajalle kohtaan  $x = 20$  piirretyn tangentin kulmakerroin.

Merkitään funktion  $f$  kuvaajalle piste kohtaan  $x = 20$ .

Piirretään kuvaajalle tangentti kohtaan  $x = 20$ .

Määritetään tangentin kulmakerroin.



Tangentin kulmakertoimeksi saadaan  $-4$ . Siten  $f'(20) = -4$ .

**Vastaus**

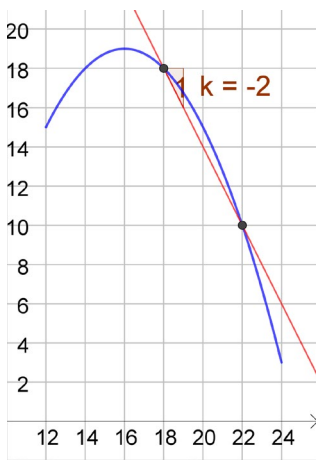
**a) 2**

**b)  $-4$**

## K12.

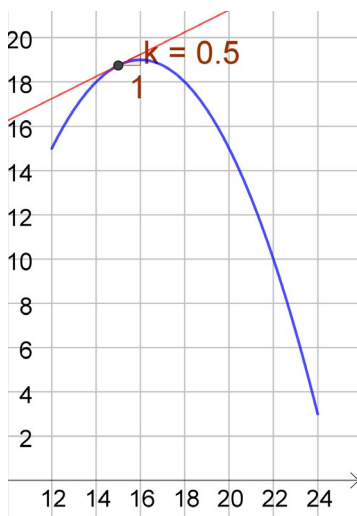
- a) Funktion  $f(x) = -0,25x^2 + 8x - 45$  keskimääräisen muutosnopeuden ilmaisee kuvaajan pisteiden kautta piirretyn sekantin kulmakerroin.

Piirretään funktion kuvaaja ja merkitään kuvaajalle pisteet kohtiin  $x = 18$  ja  $x = 22$ . Piirretään pisteiden kautta kulkeva sekantti ja määritetään sekantin kulmakerroin.



Sekantin kulmakertoimeksi saadaan  $-2$ . Lämpötilan keskimääräinen muutosnopeus on  $-2$  °C/h (eli lämpötila alenee keskimäärin 2 astetta tunnissa).

- b) Hetkellisen muutosnopeuden klo 15.00 ilmaisee derivaatta kohdassa  $x = 15$ . Merkitään kuvaajalle piste kohtaan  $x = 15$ , piirretään pisteeseen kuvaajan tangentti ja määritetään tangentin kulmakerroin.



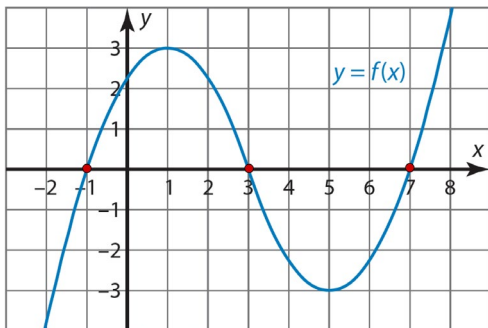
Tangentin kulmakertoimeksi saadaan 0,5. Siten lämpötilan hetkellinen muutosnopeus klo 15.00 on 0,5 °C/h.

**Vastaus**

- a)  $-2\text{ °C/h}$
- b)  $0,5\text{ °C/h}$

### K13.

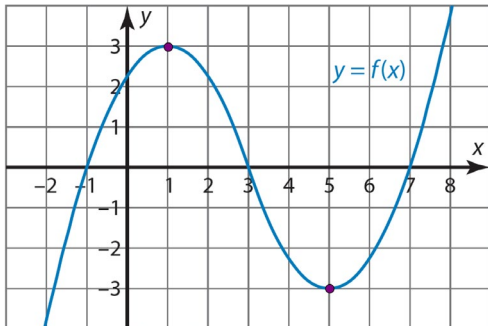
- a) Yhtälön  $f(x) = 0$  ratkaisuna ovat funktion  $f$  nollakohdat.



Nollakohtia ovat  $x = -1$ ,  $x = 3$  ja  $x = 7$ .

Yhtälön  $f(x) = 0$  ratkaisu on  $x = -1$ ,  $x = 3$  tai  $x = 7$ .

- b) Yhtälön  $f'(x) = 0$  ratkaisuna ovat funktion  $f$  derivaatan nollakohdat eli ne kohdat, joihin piirretty tangenti on vaakasuora.



Derivaatan nollakohdat ovat  $x = 1$  ja  $x = 5$ .

Yhtälön  $f'(x) = 0$  ratkaisu on  $x = 1$  tai  $x = 5$ .

- c) Epäyhtälön  $f'(x) \leq 0$  ratkaisuna ovat ne  $x$ :n arvot, joilla funktio  $f$  on vähenevä, eli ne kohdat, joihin piirretty tangenti on vaakasuora tai laskeva.

Epäyhtälön  $f'(x) \leq 0$  ratkaisu on  $1 \leq x \leq 5$ .

- d)** Epäyhtälön  $f(x) \geq 0$  ratkaisuna ovat ne  $x$ :n arvot, joilla funktio  $f$  saa epänegatiivisen arvon.

Epäyhtälön  $f(x) \geq 0$  ratkaisu on  $-1 \leq x \leq 3$  tai  $x \geq 7$ .

**Vastaus**

**a)**  $x = -1, x = 3$  tai  $x = 7$

**b)**  $x = 1$  tai  $x = 5$

**c)**  $1 \leq x \leq 5$

**d)**  $-1 \leq x \leq 3$  tai  $x \geq 7$



**K14.**

$$f(x) = \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{5}{9}$$

$$\begin{aligned}\text{a) } f'(x) &= \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \cdot 1 + 0 \\ &= \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b) } f'(-2) &= \frac{3}{4} \cdot (-2) + \frac{1}{2} \\ &= -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \\ &= -\frac{2}{2} = -1\end{aligned}$$

**Vastaus**

$$\text{a) } f'(x) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$$

$$\text{b) } -1$$

## K15.

$$f(x) = 3x^2 - 5x - 2$$

a) Määritetään funktion  $f$  nollakohdat.

$$3x^2 - 5x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6}$$

$$x = \frac{5+7}{6} = \frac{12}{6} = 2 \quad \text{tai} \quad x = \frac{5-7}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

b) Määritetään derivaattafunktio.

$$f'(x) = 3 \cdot 2x - 5 \cdot 1 - 0 = 6x - 5$$

Määritetään derivaattafunktion nollakohdat.

$$6x - 5 = 0 \quad | +5$$

$$6x = 5 \quad | :6$$

$$x = \frac{5}{6}$$

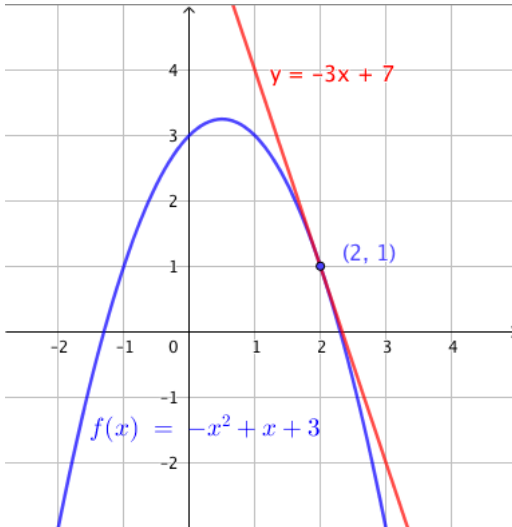
### Vastaus

a)  $x = -\frac{1}{3}$  ja  $x = 2$

b)  $x = \frac{5}{6}$

## K16.

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä kuva geometriaohjelmalla.



Lasketaan funktion kuvaajan pisteen  $y$ -koordinaatti kohdassa  $x = 2$ .

$$f(x) = -x^2 + x + 3$$

$$f(2) = -2^2 + 2 + 3 = 1$$

Tangentti kulkee pisteen  $(2, 1)$  kautta.

Määritetään funktion  $f$  derivaatta kohdassa  $x = 2$ .

$$f'(x) = -2x + 1$$

$$f'(2) = -2 \cdot 2 + 1 = -3$$

Tangentin kulmakerroin on  $-3$ .

Muodostetaan tangentin yhtälö.

$$y - 1 = -3(x - 2)$$

$$y - 1 = -3x + 6$$

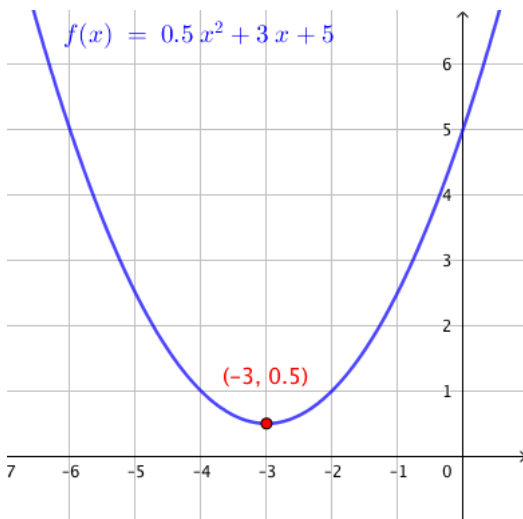
$$y = -3x + 7$$

**Vastaus**

$$y = -3x + 7$$

## K17.

Tämä ratkaisu on tehty GeoGebralla. Paraabelin huippu on määritetty **Ääriarvot**-toiminnolla.



a) Funktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.

b) Paraabelin huippu on pisteessä  $(-3; 0,5)$ .

c) Funktion pienin arvo on  $0,5$ .  
Funktiolla ei ole suurinta arvoa.

## K18.

- a) Paraabeli  $y = x^2 - x + 5$  on funktion  $f(x) = x^2 - x + 5$  kuvaaja.

Paraabelin huipun  $x$ -koordinaatti on derivaattafunktion  $f'$  nollakohta.

$$f'(x) = 2x - 1$$

$$2x - 1 = 0 \quad | +1$$

$$2x = 1 \quad | :2$$

$$x = 0,5$$

Paraabelin huipun  $y$ -koordinaatti on funktion  $f$  arvo kohdassa  $x = 0,5$ .

$$f(0,5) = 0,5^2 - 0,5 + 5 = 4,75$$

Huippu on pisteessä  $(0,5; 4,75)$ .  
Paraabeli aukeaa ylöspäin.

- b) Paraabeli  $y = -3x^2 + 12x - 1$  on funktion  $f(x) = -3x^2 + 12x - 1$  kuvaaja.

Paraabelin huipun  $x$ -koordinaatti on derivaattafunktion  $f'$  nollakohta.

$$f'(x) = -3 \cdot 2x + 12 \cdot 1 - 0 = -6x + 12$$

$$-6x + 12 = 0 \quad | -12$$

$$-6x = -12 \quad | :(-6)$$

$$x = 2$$

Paraabelin huipun  $y$ -koordinaatti on funktion  $f$  arvo kohdassa  $x = 2$

$$f(2) = -3 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 - 1 = 11$$

Huippu on pisteessä (2, 11).

Paraabeli aukeaa alaspäin.

**Vastaus**

**a)** huippu (0,5; 4,75), aukeaa ylöspäin

**b)** huippu (2, 11), aukeaa alaspäin

## K19.

- a) Funktion  $f(x) = 2x^2 - 4x$  kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.

Funktiolla ei ole suurinta arvoa.

Funktion pienin arvo on paraabelin huipun  $y$ -koordinaatti.

Paraabelin huipun  $x$ -koordinaatti on derivaattafunktion  $f'$  nollakohta.

$$f'(x) = 2 \cdot 2x - 4 \cdot 1 = 4x - 4$$

$$4x - 4 = 0 \quad | + 4$$

$$4x = 4 \quad | : 4$$

$$x = 1$$

Paraabelin huipun  $y$ -koordinaatti on funktion  $f$  arvo kohdassa  $x = 1$

$$f(1) = 2 \cdot 1^2 - 4 = -2$$

Huippu on pisteessä  $(1, -2)$ .

Funktion pienin arvo on  $-2$ .

- b) Funktion  $g(x) = -x^2 - 8x + 9$  kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.

Funktiolla ei ole pienintä arvoa.

Funktion suurin arvo on paraabelin huipun  $y$ -koordinaatti.

Paraabelin huipun  $x$ -koordinaatti on derivaattafunktion  $g'$  nollakohta.

$$g'(x) = -2x - 8 \cdot 1 + 0 = -2x - 8$$

$$-2x - 8 = 0 \quad | + 8$$

$$-2x = 8 \quad | : (-2)$$

$$x = -4$$



Paraabelin huipun  $y$ -koordinaatti on funktion  $g$  arvo kohdassa  $x = -4$

$$g(-4) = -(-4)^2 - 8 \cdot (-4) + 9 = 25$$

Huippu on pisteessä  $(-4, 25)$ .

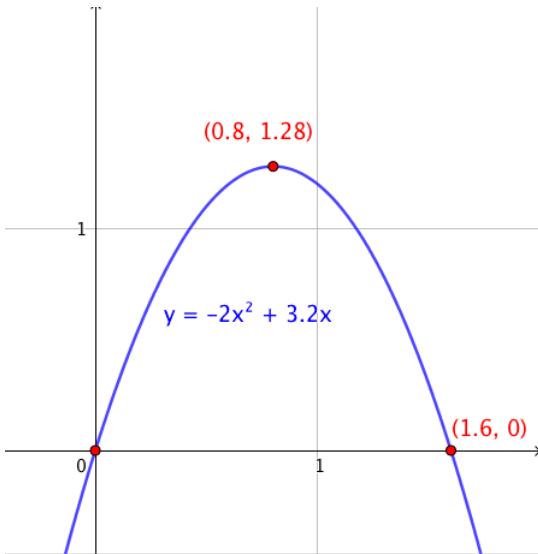
Funktion suurin arvo on 25.

**Vastaus**

- a)** pienin arvo  $-2$ , ei suurinta arvoa
- b)** suurin arvo 25, ei pienintä arvoa

## K20.

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä kuva geometriaohjelmalla.



Paraabeli  $y = 3,2x - 2x^2$  on funktion  $f(x) = 3,2x - 2x^2$  kuvaaja.

Määritetään funktion  $f$  nollakohdat.

$$3,2x - 2x^2 = 0$$

[Ratkaistaan CAS-laskimella.](#)

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = 1,6$$

Paraabelin huipun  $x$ -koordinaatti on derivaattafunktion  $f'$  nollakohta.

$$f'(x) = 3,2x - 4x$$

[Derivoidaan CAS-laskimella.](#)

$$3,2x - 4x = 0$$

[Ratkaistaan CAS-laskimella.](#)

$$x = 0,8$$

Paraabelin huipun  $y$ -koordinaatti on funktion  $f$  arvo

kohdassa  $x = 0,8$ .

$$f(0,8) = 3,2 \cdot 0,8 - 2 \cdot 0,8^2 \approx 1,28$$

Huippu on pisteessä  $(0,8; 1,28)$ .

Teltan leveys on 1,60 m ja korkeus 1,28 m.

**Vastaus**

leveys 1,60 m, korkeus 1,28 m

## K21.

Merkitään ylöstulevan poikkituen pituutta metreinä kirjaimella  $x$  ja pystytuen kirjaimella  $y$ .

Teräskiskoa on käytettävissä 18 m. Ratkaistaan muuttujan  $y$  lauseke.

$$3x + 2y = 18$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$y = 9 - 1,5x$$

Muodostetaan funktio, joka ilmaisee aukon pinta-alan.

$$A(x) = xy$$

$$= x(9 - 1,5x)$$

Sievennetään CAS-laskimella.

$$= 9x - 1,5x^2$$

Poikki- ja pystytuen pituuden on oltava epänegatiivinen. Päätellään tämän perusteella funktion  $A$  määrittelyehto.

$$x \geq 0 \quad \text{ja} \quad y \geq 0$$

$$9 - 1,5x \geq 0$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x \leq 6$$

On siis määritettävä funktion  $A$  suurin arvo välillä  $0 \leq x \leq 6$ .

Määritellään laskimeen funktio  $A(x) = 9x - 1,5x^2$ .

Määritetään laskimen Max-komennolla väliltä

$0 \leq x \leq 6$  kohta, jossa funktion  $A$  arvo on suurin.

$\text{Max}(A, 0, 6)$

$\text{fMax}(A(x), x, 0, 6)$

Laskin antaa kohdaksi  $x = 3$ . Lasketaan muuttuja  $y$ .

$$y = 9 - 1,5x = 9 - 1,5 \cdot 3 = 4,5$$

Aukon leveys on 3,0 metriä ja korkeus 4,5 metriä.

**Vastaus**

korkeus 4,5 m, leveys 3,0 m

## K22.

Valitaan muuttujaksi  $x$  mökkien lukumäärän muutos. Kootaan tiedot taulukkoon.

	Mökkien lukumäärä (kpl)	Viikko-vuokra (€)	Viikon vuokratulot (€)
Alussa	30	420	$30 \cdot 420$
Muutoksen jälkeen	$30 + x$	$420 - 10x$	$(30 + x)(420 - 10x)$

Muodostetaan funktio, joka ilmaisee viikon vuokratulot euroina.

$$f(x) = (30 + x)(420 - 10x) \quad \text{Sievennetään CAS-laskimella.}$$
$$= -10x^2 + 120x + 12\,600$$

Mökkien lukumäärän ja viikkovuokran on oltava epänegatiivisia. Päättellään tämän perusteella funktion  $f$  määrittelyehto.

$$30 + x \geq 0 \quad \text{ja} \quad 420 - 10x \geq 0 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$
$$x \geq -30 \quad \quad \quad x \leq 42$$

On siis määritettävä funktion  $f$  suurin arvo välillä  $-30 \leq x \leq 42$ .

Määritellään laskimeen funktio  $f(x) = -10x^2 + 120x + 12\,600$ .

Määritetään laskimen Max-komennolla väliltä  $-30 \leq x \leq 42$  kohta, jossa funktion  $f$  arvo on suurin.

$$\text{Max}(f, -30, 42) \quad \text{fMax}(f(x), x, -30, 42)$$

Laskin antaa kohdaksi  $x = 6$ .

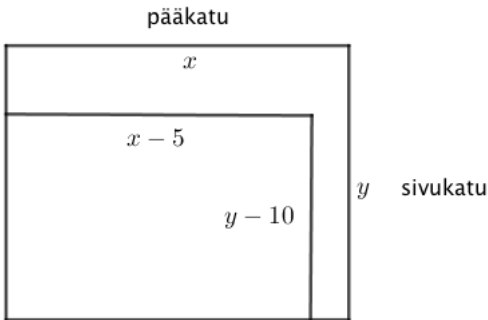
Funktion  $f$  suurin arvo on  $f(6) = 12\,960$ .

Mökkien lukumäärän tulee olla  $30 + 6 = 36$ .  
Viikon vuokratulot ovat  $12\,960$  €.

### Vastaus

36 mökkiä, vuokratulot  $12\,960$  euroa

## K23.



Merkitään pääkadun suuntaisen sivun pituutta metreinä kirjaimella  $x$  ja sivukadun suuntaisen kirjaimella  $y$ .

Tontin ympärysmitta on 150 m. Ratkaistaan muuttujan  $y$  lauseke.

$$2x + 2y = 150$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$y = 75 - x$$

Muodostetaan funktio, joka ilmaisee rakentamiskelpoisen alueen pinta-alan.

$$A(x) = (x - 5)(y - 10)$$

$$y = 75 - x$$

$$= (x - 5)(75 - x - 10)$$

Sievennetään CAS-laskimella.

$$= -x^2 + 70x - 325$$

Sivujen pituuksien on oltava epänegatiivinen. Päätellään tämän perusteella funktion  $A$  määrittelyehto.

$$x - 5 \geq 0 \quad \text{ja} \quad y - 10 \geq 0$$

$$y = 75 - x$$

$$x \geq 5 \quad 75 - x - 10 \geq 0$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x \leq 65$$

On siis määritettävä funktion  $A$  suurin arvo välillä  $5 \leq x \leq 65$ .

Määritellään laskimeen funktio  $A(x) = -x^2 + 70x - 325$ .

Määritetään laskimen Max-komennolla väliltä  $5 \leq x \leq 65$  kohta, jossa funktion  $A$  arvo on suurin.

$\text{Max}(A, 5, 140)$   
 $\text{fMax}(A(x), x, 5, 140)$

Laskin antaa kohdaksi  $x = 35$ . Lasketaan muuttuja  $y$ .

$$y = 75 - x = 75 - 35 = 40$$

Pääkadun suuntaisen sivun pituus on 35 m  
ja sivukadun suuntaisen 40 m.

### **Vastaus**

Pääkadun suuntaisen sivun pituus 35 m, sivukadun suuntaisen 40 m

## K24.

Sievennetään funktion  $f$  lauseke.

$$\begin{aligned}f(x) &= (ax + 1)(ax - 1) \\ &= a^2x^2 - 1\end{aligned}$$

Sievennetään CAS-laskimella.

a) Määritetään derivaattafunktio.

$$\begin{aligned}f(x) &= a^2x^2 - 1 \\ f'(x) &= 2a^2x\end{aligned}$$

Derivoidaan CAS-laskimella.

Ratkaistaan vakion  $a$  arvo.

$$\begin{aligned}f'(2) &= 4 \\ 2a^2 \cdot 2 &= 4 \\ a &= -1 \quad \text{tai} \quad a = 1\end{aligned}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

b) Tangentti piirretään funktion kuvaajalle kohtaan 1.

Kuvaajan pisteen  $x$ -koordinaatti on siis 1. Lasketaan  $y$ -koordinaatti.

$$f(1) = a^2 \cdot 1^2 - 1 = a^2 - 1$$

Tangentti piirretään kuvaajan pisteeseen  $(1, a^2 - 1)$ .

Tangentin kulmakerroin on  $f'(1) = 2a^2 \cdot 1 = 2a^2$ .

Muodostetaan tangentin yhtälö.

$$\begin{aligned}y - (a^2 - 1) &= 2a^2 \cdot (x - 1) \\ y &= 2a^2x - a^2 - 1\end{aligned}$$

Ratkaistaan muuttuja  $y$   
CAS-laskimella.



Tangentti leikkaa  $y$ -akselin pisteessä  $(0, -5)$ .

$$-5 = 2a^2 \cdot 0 - a^2 - 1$$

$$a = -2 \quad \text{tai} \quad a = 2$$

[Ratkaistaan CAS-laskimella.](#)

**Vastaus**

**a)**  $a = -1$  tai  $a = 1$

**b)**  $a = -2$  tai  $a = 2$

## K25.

a)  $5x - 4 \leq 0$   $| +4$

Siirretään termi.

$5x \leq 4$   $| : 5$  ( $> 0$ )

Kun jaetaan positiivisella luvulla,  
epäyhtälömerkin suunta säilyy.

$$x \leq \frac{4}{5}$$

b)  $-3x - 7 < 0$   $| +7$

Siirretään termi.

$-3x < 7$   $| : (-3)$  ( $< 0$ )

Kun jaetaan negatiivisella luvulla,  
epäyhtälömerkin suunta kääntyy.

$$x > -\frac{7}{3}$$

### Vastaus

a)  $x \leq \frac{4}{5}$

b)  $x > -\frac{7}{3}$

## K26.

a) Tulee selvittää, millä muuttujan  $x$  arvoilla funktion

$f(x) = x^2 - x - 30$  arvo on positiivinen. Tutkitaan funktion  $f$  merkkiä.

Polynomifunktio voi vaihtaa merkkiään vain nollakohdissa. Ratkaistaan funktion  $f$  nollakohdat.

$$x^2 - x - 30 = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$a = 1, b = -1 \text{ ja } c = -30$$

$$= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-30)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{121}}{2}$$

$$= \frac{1 \pm 11}{2}$$

Lasketaan ratkaisujen arvot yksitellen.

$$x = \frac{1+11}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ tai } x = \frac{1-11}{2} = \frac{-10}{2} = -5$$

Päätellään funktion merkit testaamalla.

Funktion  $f$  merkki voi vaihtua vain nollakohdissa  $-5$  ja  $6$ . Nollakohdat jakavat lukusuoran kolmeen osaan. Lasketaan kultakin osaväliltä yksi funktion  $f$  arvo.



$$f(-6) = (-6)^2 - (-6) - 30 = 12 > 0 \quad +$$

$$f(0) = 0^2 - 0 - 30 = -30 < 0 \quad -$$

$$f(7) = 7^2 - 7 - 30 = 12 > 0 \quad +$$

Laaditaan funktion  $f$  merkkikaavio.

$$f(x) = x^2 - x - 30 \quad \begin{array}{c|c|c} -5 & 6 & \\ \hline + & - & + \end{array}$$

Funktion  $f(x) = x^2 - x - 30$  arvo on positiivinen, kun  $x < -5$  tai  $x > 6$ .

Epäyhtälö  $x^2 - x - 30 > 0$  toteutuu, kun  $x < -5$  tai  $x > 6$

Huomaa, että voit ratkaista epäyhtälön myöskin päättelämällä funktion merkit kuvaajan avulla.

b) Tulee selvittää, millä muuttujan  $x$  arvoilla funktion

$f(x) = -x^2 + x + 2$  arvo on positiivinen tai nolla. Tutkitaan funktion  $f$  merkkiä.

Polynomifunktio voi vaihtaa merkkiään vain nollakohdissa. Ratkaistaan funktion  $f$  nollakohdat.

$$-x^2 + x + 2 = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$a = -1, \quad b = 1 \quad \text{ja} \quad c = 2$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2}}{2 \cdot (-1)}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{-2}$$

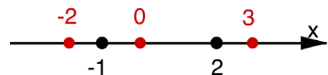
$$= \frac{-1 \pm 3}{-2}$$

Lasketaan ratkaisujen arvot yksitellen.

$$x = \frac{-1+3}{-2} = \frac{2}{-2} = -1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-1-3}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

Päätellään funktion merkit testaamalla.

Funktion  $f$  merkki voi vaihtua vain nollakohdissa  $-1$  ja  $2$ . Nollakohdat jakavat lukusuoran kolmeen osaan. Lasketaan kultakin osaväliltä yksi funktion  $f$  arvo.



$$f(-2) = -(-2)^2 + (-2) + 2 = -4 < 0 \quad -$$

$$f(0) = 0^2 + 0 + 2 = 2 > 0 \quad +$$

$$f(3) = -3^2 + 3 + 2 = -4 < 0 \quad -$$

Laaditaan funktion  $f$  merkkikaavio.

$$f(x) = -x^2 + x + 2 \quad \begin{array}{c|c|c} -1 & 2 & \\ \hline - & + & - \\ \hline \end{array}$$

Funktion  $f(x) = -x^2 + x + 2$  arvo on positiivinen tai nolla, kun  $-1 \leq x \leq 2$ .

Epäyhtälö  $-x^2 + x + 2 \geq 0$  toteutuu, kun  $-1 \leq x \leq 2$ .

Huomaa, että voit ratkaista epäyhtälön myöskin päättelämällä funktion merkit kuvaajan avulla.

### Vastaus

**a)**  $x < -5$  tai  $x > 6$

**b)**  $-1 \leq x \leq 2$

## K27.

Määritetään funktion  $f(x) = -x^2 + 5x + 16$  derivaatafunktio.

$$f'(x) = -2x + 5$$

Muodostetaan ja ratkaistaan epäyhtälö.

$$-2x + 5 > 0 \quad | -5$$

$$-2x > -5 \quad | : (-2) (< 0)$$

$$x < \frac{5}{2}$$

Funktion  $f(x) = -x^2 + 5x + 16$  derivaatta on positiivinen, kun  $x < \frac{5}{2}$ .

**Vastaus**

$$x < \frac{5}{2}$$

## K28.

Määritetään funktion  $g(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 7$  derivaattafunktio.

$$g'(x) = 2 \cdot 3x^2 - 2x - 4 = 6x^2 - 2x - 4$$

Ratkaistaan funktion  $g'$  nollakohdat.

$$6x^2 - 2x - 4 = 0 \qquad ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad a = 6, \quad b = -2 \quad \text{ja} \quad c = -4$$

$$= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-4)}}{2 \cdot 6}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{100}}{12}$$

$$= \frac{2 \pm 10}{12}$$

$$x = \frac{2+10}{12} = \frac{12}{12} = 1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{2-10}{12} = \frac{-8}{12} = -\frac{2}{3}$$

Funktion  $g'$  merkki voi vaihtua vain

nollakohdissa  $-\frac{2}{3}$  ja  $1$ .

Nollakohdat jakavat lukusuoran kolmeen osaan.



Lasketaan kultakin osaväliltä yksi

funktion  $g'$  arvo.

$$g'(-1) = 6 \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 4 = 3 > 0 \qquad +$$

$$g'(0) = 6 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 - 4 = -4 < 0 \qquad -$$

$$g'(2) = 6 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 - 4 = 16 > 0 \qquad +$$

Laaditaan funktion  $g'$  merkkikaavio.

$$g'(x) = 6x^2 - 2x - 4 \quad \begin{array}{c|c|c} -2/3 & 1 & \\ \hline + & - & + \\ \hline \end{array}$$

Funktion  $g'$  arvo on positiivinen, kun  $x < -\frac{2}{3}$  tai  $x > 1$ .

Funktion  $g(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 7$  derivaatta on positiivinen, kun  $x < -\frac{2}{3}$  tai  $x > 1$ .

**Vastaus**

$$x < -\frac{2}{3} \text{ tai } x > 1$$



## K29

a)  $D x^7 = 7 \cdot x^{7-1}$  Alkuperäinen eksponentti siirtyy kertoimeksi.  
Eksponentti pienenee yhdellä.  
 $= 7x^6$

b)  $D(15x^4) = 15 \cdot 4x^{4-1}$  Kerroin 15 säilyy ennallaan.  
 $= 60x^3$

c)  $D(2x^5 - 3x^4 + 7x - 9)$  Derivoidaan termeittäin.  
 $= 2 \cdot 5x^4 - 3 \cdot 4x^3 + 7 - 0$   
 $= 10x^4 - 12x^3 + 7$

### Vastaus

a)  $7x^6$  b)  $60x^3$  c)  $10x^4 - 12x^3 + 7$

## K30

a) Määritetään derivaattafunktio.

$$\begin{aligned}f'(x) &= D(2x^4 - 3x^2 + x) \\&= 2 \cdot 4x^3 - 3 \cdot 2x^1 + 1 \\&= 8x^3 - 6x + 1\end{aligned}$$

Lasketaan derivaattafunktion arvo kohdassa 2.

$$f'(2) = 8 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2 + 1 = 53$$

b) Määritetään derivaattafunktio.

$$\begin{aligned}f'(x) &= D\left(\frac{3}{2}x^4 - 5x^3 - 145\right) \\&= \frac{3}{2} \cdot 4x^3 - 5 \cdot 3x^2 - 0 \\&= 6x^3 - 15x^2\end{aligned}$$

Lasketaan derivaattafunktion arvo kohdassa 2.

$$f'(2) = 6 \cdot 2^3 - 15 \cdot 2^2 = -12$$

### Vastaus

a)  $f'(2) = 53$

b)  $f'(2) = -12$

## K31

- a) Kuvaajalle kohtaan  $x = 2$  piirretyn tangentin kulmakerroin on funktion  $f$  derivaatta kohdassa 2. Derivoidaan funktio ja lasketaan kulmakerroin.

$$f'(x) = 4x^3 - 2 \cdot 3x^2 - 1 = 4x^3 - 6x^2 - 1$$

$$f'(2) = 4 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2^2 - 1 = 7$$

Tangentin kulmakerroin on 7.

- b) Määritetään kuvaajan piste, johon tangentti piirretään.

Kun  $x = 2$ , niin  $y = f(2) = 2^4 - 2 \cdot 2^3 - 2 = -2$ .

Tangentti piirretään kuvaajan pisteeseen  $(2, -2)$  ja sen kulmakerroin on 7. Määritetään tangentin yhtälö.

$$\begin{aligned} y - (-2) &= 7(x - 2) & y - y_0 &= k(x - x_0) \\ y + 2 &= 7x - 14 & & \\ y &= 7x - 16 & & \end{aligned}$$

### Vastaus

- a) 7   b)  $y = 7x - 16$

## K32

- a) Funktion kulku päätellään derivaattafunktion merkeistä. Määritetään funktion  $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 4x + 5000$  derivaattafunktio.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -3x^2 + 4 \cdot 2x - 4 + 0 \\ &= -3x^2 + 8x - 4 \end{aligned}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$-3x^2 + 8x - 4 = 0 \quad a = -3, b = 8, c = -4$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-4)}}{2 \cdot (-3)} = \frac{-8 \pm 4}{-6}$$

$$x = \frac{-8 + 4}{-6} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-8 - 4}{-6} = \frac{-12}{-6} = 2$$

Laaditaan funktion  $f$  kulkukaavio. Derivaattafunktion  $f'$  merkki voi vaihtua vain nollakohdissa  $\frac{2}{3}$  ja  $2$ . Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

$$f'(x) = -3x^2 + 8x - 4$$

$$f'(0) = -3 \cdot 0^2 + 8 \cdot 0 - 4 = -4 < 0 \quad -$$

$$f'(1) = -3 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 - 4 = 1 > 0 \quad +$$

$$f'(3) = -3 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3 - 4 = -7 < 0 \quad -$$

		$\frac{2}{3}$		$2$	
$f'$	$-$	$ $	$+$	$ $	$-$
$f$	$\searrow$	$ $	$\nearrow$	$ $	$\searrow$

Funktio  $f$  on aidosti kasvava, kun  $\frac{2}{3} \leq x \leq 2$ .

Funktio  $f$  on aidosti vähenevä, kun  $x \leq \frac{2}{3}$  ja kun  $x \geq 2$ .

- b) Muuttujan arvot 2,000 003 ja 2,000 004 ovat molemmat kohdan 2 oikealla puolella. Koska funktio  $f$  on siellä aidosti vähenevä, funktion arvo  $f(2,000\ 004)$  on suurempi.

### Vastaus

- a) aidosti kasvava, kun  $\frac{2}{3} \leq x \leq 2$ ,

aidosti vähenevä, kun  $x \leq \frac{2}{3}$  ja kun  $x \geq 2$ .

- b)  $f(2,000\ 003)$

## K33

Funktion kulku päätellään derivaattafunktion merkeistä. Määritetään funktion  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$  derivaattafunktio.

$$\begin{aligned}f'(x) &= 2 \cdot 3x^2 - 3 \cdot 2x + 0 \\&= 6x^2 - 6x\end{aligned}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$6x^2 - 6x = 0$$

Erötetaan yhteinen tekijä  $x$ .

$$x(6x - 6) = 0$$

Käytetään tulon nollasääntöä.

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad 6x - 6 = 0 \quad | +6$$

$$6x = 6 \quad | :6$$

$$x = 1$$

Laaditaan funktion  $f$  kulkukaavio. Derivaattafunktion  $f'$  merkki voi vaihtua vain nollakohdissa  $0$  ja  $1$ . Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

$$f'(x) = 6x^2 - 6x$$

$$f'(-1) = 12 > 0 \quad +$$

$$f'(0,5) = -1,5 < 0 \quad -$$

$$f'(2) = 12 > 0 \quad +$$

		0		1	
$f'$	+		-		+
$f$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
		max		min	

Funktiolla  $f$  on maksimikohta  $x = 0$  ja minimikohta  $x = 1$ .

**Vastaus**

maksimikohta  $x = 0$ , minimikohta  $x = 1$ .

## K34

- a) Funktion kulku päätellään derivaattafunktion merkeistä. Määritetään derivaattafunktio.

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 5x - 2 \quad \text{Derivoidaan CAS-laskimella.}$$

$$f'(x) = x^2 + 6x + 5$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$x^2 + 6x + 5 = 0 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$x = -5 \quad \text{tai} \quad x = -1$$

Laaditaan funktion  $f$  kulkukaavio. Derivaattafunktion  $f'$  merkki voi vaihtua vain nollakohdissa  $-5$  ja  $-1$ . Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

$$f'(x) = x^2 + 6x + 5$$

$$f'(-6) = 5 > 0 \quad +$$

$$f'(-3) = -4 < 0 \quad -$$

$$f'(0) = 5 > 0 \quad +$$

		-5		-1	
$f'$	+		-		+
$f$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
		max		min	

Funktio  $f$  on kasvava välillä  $x \leq -5$  ja välillä  $x \geq -1$ .

Funktio  $f$  on vähenevä välillä  $-5 \leq x \leq -1$ .

**b)** Funktion  $f$  maksimiarvo on  $f(-5) = \frac{19}{3}$ .

Funktion  $f$  minimiarvo on  $f(-1) = -\frac{13}{3}$ .

### **Vastaus**

**a)** kasvava välillä  $x \leq -5$  ja välillä  $x \geq -1$ ; vähenevä välillä  $-5 \leq x \leq -1$

**b)** maksimiarvo  $f(-5) = \frac{19}{3}$ , minimiarvo  $f(-1) = -\frac{13}{3}$



## K35

Polynomifunktio  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$  saa suljetulla välillä suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

Määritetään derivaattafunktio.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 6 \cdot 2x + 9 - 0 \\ &= 3x^2 - 12x + 9 \end{aligned}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\begin{aligned} 3x^2 - 12x + 9 &= 0 && |:3 \\ x^2 - 4x + 3 &= 0 && a = 1, b = -4, c = 3 \\ x &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2} \\ x &= \frac{4+2}{2} = 3 \quad \text{tai} \quad x = \frac{4-2}{2} = 1 \end{aligned}$$

- a) Tutkitaan funktiota välillä  $0 \leq x \leq 2$ .

Derivaattafunktion nollakohdista vain  $x = 1$  kuuluu välille,

Lasketaan funktion  $f$  arvo välin päätepisteissä ja välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$$

$$f(0) = -1 \quad \text{pienin}$$

$$f(2) = 1$$

$$f(1) = 3 \quad \text{suurin}$$

Välillä  $0 \leq x \leq 2$  funktion  $f$  suurin arvo on 3 ja pienin arvo  $-1$ .

- b) Tutkitaan funktiota välillä  $2 \leq x \leq 4$ .

Derivaattafunktion nollakohdista vain  $x = 3$  kuuluu välille,

Lasketaan funktion  $f$  arvo välin päätepisteissä ja välille kuuluvassa

derivaattafunktion nollakohdassa.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$$

$$f(2) = 1$$

$$f(4) = 3 \quad \text{suurin}$$

$$f(3) = -1 \quad \text{pienin}$$

Välillä  $2 \leq x \leq 4$  funktion  $f$  suurin arvo on 3 ja pienin arvo  $-1$ .

### Vastaus

**a)** suurin arvo 3, pienin arvo  $-1$

**b)** suurin arvo 3, pienin arvo  $-1$

## K36

- a) Polynomifunktio  $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 2$  saa suljetulla välillä  $[2, 6]$  suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa

Määritetään derivaattafunktio.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 2 \quad \text{Derivoidaan CAS-laskimella.}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x - 15$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$3x^2 - 12x - 15 = 0 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$x = -1 \quad \text{tai} \quad x = 5$$

Vain nollakohta  $x = 5$  kuuluu välille  $[2, 6]$ .

Lasketaan funktion  $f$  arvo välin päätepisteissä sekä välille kuuluvissa derivaattafunktion nollakohdissa.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 2 \quad \text{Tallennetaan funktion } f \text{ lauseke CAS-laskimeen.}$$

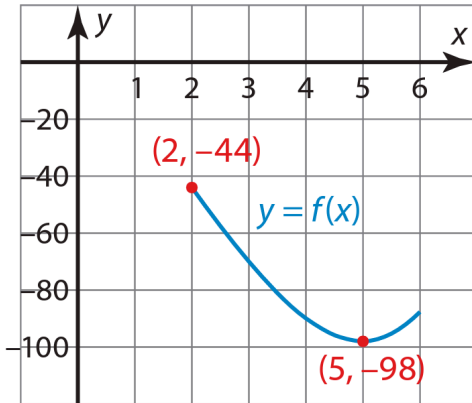
$$f(2) = -44 \quad \text{suurin}$$

$$f(6) = -88$$

$$f(5) = -98 \quad \text{pienin}$$

Välillä  $[2, 6]$  funktion  $f$  suurin arvo on  $-44$  ja pienin  $-98$ .

- b) Piirretään funktion  $f$  kuvaaja välillä  $[2, 6]$ .



Kuvaajan perusteella a-kohdassa tehdyt havainnot pitävät paikkaansa:

- suurin arvo  $-44$ , ja sen funktio saa kohdassa  $x = 2$
- pienin arvo  $-98$ , ja sen funktio saa kohdassa  $x = 5$ .

### Vastaus

a) suurin arvo  $-44$ , pienin arvo  $-98$

## K37

Tulo on

$$x^2 \cdot y$$

Sijoitetaan  $y = 3 - x$ .

$$= x^2 \cdot (3 - x)$$

$$= 3x^2 - x^3.$$

Koska piste  $(x, y)$  on pisteiden  $(0, 3)$  ja  $(3, 0)$  välissä, niin on oltava  $0 \leq x \leq 3$ .

Pitää siis määrittää funktion  $f(x) = 3x^2 - x^3$  suurin arvo suljetulla välillä  $0 \leq x \leq 3$ . Polynomifunktio saa suljetulla välillä suurimman arvonsa välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

Määritetään funktion  $f(x) = 3x^2 - x^3$  derivaattafunktio.

$$f'(x) = 3 \cdot 2x - 3x^2 = 6x - 3x^2$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$6x - 3x^2 = 0$$

$$x \cdot (6 - 3x) = 0$$

Tulon nollasääntö.

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad 6 - 3x = 0 \quad | -6$$

$$-3x = -6 \quad | :(-3)$$

$$x = 2$$

Molemmat nollakohdat kuuluvat välille  $0 \leq x \leq 3$ .

Lasketaan funktion  $f$  arvo välin päätepisteissä ja välille kuuluvissa derivaattafunktion nollakohdissa.

$$f(x) = 3x^2 - x^3$$

$$f(0) = 0$$

$$f(3) = 0$$

$$f(2) = 4 \quad \text{suurin}$$

Tulon suurin mahdollinen arvo on 4.

**Vastaus**

4

## K38

- a) Funktion kulku päätellään derivaattafunktion merkeistä. Määritetään derivaattafunktio.

$$S(t) = -4t^3 + 30t^2 + 225t + 300 \quad \text{Derivoidaan CAS-laskimella.}$$

$$S'(t) = -12t^2 + 60t + 225$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$-12t^2 + 60t + 225 = 0 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$t = -2,5 \quad \text{tai} \quad t = 7,5$$

Laaditaan funktion  $S$  kulkukaavio. Derivaattafunktion  $S'$  merkki voi vaihtua vain nollakohdissa  $-2,5$  ja  $7,5$ . Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

$$S'(t) = -12t^2 + 60t + 225$$

$$S'(-5) = -375 < 0 \quad -$$

$$S'(0) = 225 > 0 \quad +$$

$$S'(10) = -375 < 0 \quad -$$

		$-2,5$		$7,5$	
$S'$	$-$	$ $	$+$	$ $	$-$
$S$	$\searrow$	$ $	$\nearrow$	$ $	$\searrow$
		min		max	

Kulkukaavion mukaan määrä kääntyy laskuun  $7,5$  viikon kuluttua.

Lasketaan kannan suuruus  $7,5$  viikon kuluttua.

$$S(7,5) = 1987,5 \approx 2000 \quad (\text{yksilöä})$$

**b)** Lukumäärän lisääntymisnopeus on määrän derivaatta

$$S'(t) = -12t^2 + 60t + 225.$$

Derivaatan  $S'(t) = -12t^2 + 60t + 225$  kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joten se saa suurimman arvonsa huipussa. Huipun sijainti saadaan selville määrittämällä derivaatan nollakohta.

Määritetään derivaatan derivaatta.

$$S'(t) = -12t^2 + 60t + 225$$

Derivoidaan CAS-laskimella.

$$S''(t) = -24t + 60$$

Ratkaistaan nollakohta.

$$-24t + 60 = 0$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$t = 2,5$$

Kasvunopeus on suurimmillaan, kun  $t = 2,5$ .

Lasketaan kasvunopeus ajanhetkellä  $t = 2,5$ .

$$S'(2,5) = 300 \text{ (yksilöä / viikko)}$$

## Vastaus

**a)** 7,5 viikon kuluttua, kannan suuruus 2000 yksilöä

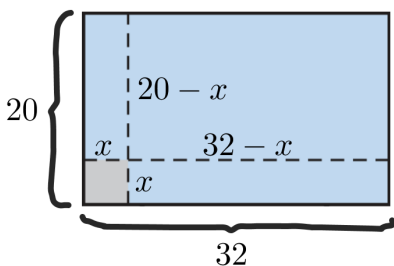
**b)** 2,5 viikon kuluttua, kasvunopeus 300 yksilöä/viikko



## K39

Merkitään poisleikattavan neliön sivun pituutta senttimetreinä kirjaimella  $x$ .

Laatikon pohja muodostuu suorakulmiosta, jonka sivujen pituudet ovat  $20 - x$  ja  $32 - x$ .  
Laatikon korkeus on  $x$ .



Muodostetaan funktio, joka ilmaisee laatikon tilavuuden.

$$\begin{aligned} V(x) &= x \cdot (20 - x)(32 - x) \\ &= x^3 - 52x^2 + 640x \end{aligned}$$

Sievennetään CAS-laskimella.

Särmien pituuksien on oltava epänegatiivisia. Päätellään tämän perusteella funktion  $V$  määrittelyehto.

$$\begin{array}{c|c|c} x \geq 0 & \begin{array}{c} 20 - x \geq 0 \\ x \leq 20 \end{array} & \begin{array}{c} 32 - x \geq 0 \\ x \leq 32 \end{array} \end{array}$$

On siis määritettävä kohta, jossa funktio  $V$  saa suurimman arvonsa välillä  $0 \leq x \leq 20$ .

Määritellään CAS-laskimeen funktio  $V(x) = x^3 - 52x^2 + 640x$ .

Määritetään laskimen Max-komennolla väliltä  $0 \leq x \leq 20$  kohta, jossa funktion  $V$  arvo on suurin.

Laskin antaa kohdaksi  $x = 8$ .

Rasian tilavuus on suurin, kun poisleikattavan neliön sivun pituus  $x = 8$  (cm).

Laatikon suurin tilavuus on  $V(12) = 2304$  (cm<sup>3</sup>).

Muutetaan tilavuus litroiksi.

$$\begin{aligned} 2304 \text{ cm}^3 & \qquad 1000 \text{ cm}^3 = 1 \text{ dm}^3 \\ = 2,304 \text{ dm}^3 & \qquad 1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L} \\ = 2,304 \text{ L} \approx 2,3 \text{ L} \end{aligned}$$

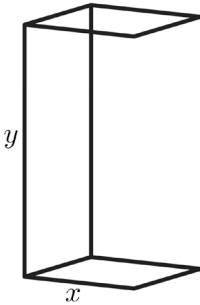
Tilavuus on suurin, kun poisleikattavan neliön sivun pituus on 8 cm.  
Tällöin rasian tilavuus on 2,3 litraa.

### **Vastaus**

neliön sivun pituus 8 cm, rasian tilavuus 2,3 L

## K40

Merkitään varjostimen pohjaneliön sivun pituutta senttimetreinä kirjaimella  $x$  ja varjostimen korkeutta senttimetreinä kirjaimella  $y$ .



Rautalankaa on käytettävissä 200 cm, joten särmien pituuksien summan pitää olla 200. Ratkaistaan muuttujan  $y$  lauseke.

$$8x + 2y = 200$$

Ratkaistaan muuttuja  $y$  CAS-laskimella.

$$y = 100 - 4x$$

Muodostetaan funktio, joka ilmaisee särmiön tilavuuden.

$$V(x) = x^2 \cdot y$$

Sijoitetaan  $y = 100 - 4x$ .

$$= x^2 \cdot (100 - 4x)$$

Sievennetään CAS-laskimella.

$$= -4x^3 + 100x^2$$

Särmien pituuksien on oltava epänegatiivisia. Päätellään tämän perusteella funktion  $V$  määrittelyehto.

$$x \geq 0 \quad \text{ja} \quad y \geq 0$$

$$100 - 4x \geq 0$$

$$x \leq 25$$

On siis määritettävä funktion  $V$  suurin arvo suljetulla välillä  $0 \leq x \leq 25$ .

Määritellään CAS-laskimeen funktio  $V(x) = -4x^3 + 100x^2$ .

Määritetään laskimen Max-komennolla väliltä  $0 \leq x \leq 25$  kohta, jossa funktion  $V$  arvo on suurin.

Laskin antaa ääriarvokohdaksi  $x = \frac{50}{3}$ .

Suurin tilavuus saavutetaan, kun  $x = \frac{50}{3}$ . Lasketaan särmiön mitat.

pohjasärmän pituus:  $x = \frac{50}{3} \approx 16,7$  (cm)

korkeus:  $y = 100 - 4 \cdot x = 100 - 4 \cdot \frac{50}{3} = \frac{100}{3} \approx 33,3$  (cm)

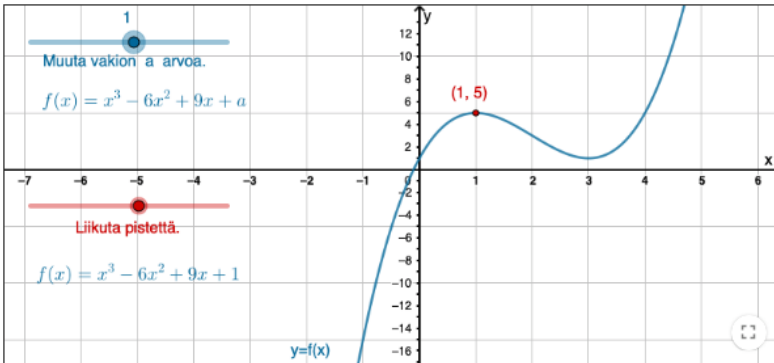
Särmiön tilavuus on mahdollisimman suuri, kun pohjasärmän pituus on 16,7 cm ja kehikon korkeus 33,3 cm.

### **Vastaus**

pohjasärmä 16,7 cm; korkeus 33,3 cm

# K41

- a) Appletin perusteella funktiolla  $f$  on maksimiarvo 5, kun  $a = 1$ .



- b) Funktion  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + a$  kulku päätellään derivaattafunktion merkeistä.

Määritetään derivaattafunktio.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + a \quad \text{Derivoidaan CAS-laskimella.}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$3x^2 - 12x + 9 = 0 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$x = 1 \quad \text{tai} \quad x = 3$$

Laaditaan funktion  $f$  kulkukaavio. Derivaattafunktion  $f'$  merkki voi vaihtua vain nollakohdissa 1 ja 3. Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$f'(0) = 9 > 0 \quad +$$

$$f'(2) = -3 < 0 \quad -$$

$$f'(4) = 9 > 0 \quad +$$

Funktion  $f$  maksimikohta on  $x = f'$   $\begin{array}{c} + \\ | \\ \nearrow \end{array}$   $\begin{array}{c} 1 \\ | \\ \searrow \end{array}$   $\begin{array}{c} - \\ | \\ \searrow \end{array}$   $\begin{array}{c} 3 \\ | \\ \nearrow \end{array}$   $\begin{array}{c} + \\ | \\ \nearrow \end{array}$   
 Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan  $f$   $\nearrow$   $\searrow$   $\nearrow$   
 $\begin{array}{ccc} & \max & \min \end{array}$

$$f(1) = 5 \quad f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + a$$

$$1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 + a = 5 \text{ Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$a = 1$$

Funktiolla  $f$  on maksimiarvo 5, kun  $a = 1$ .

**Vastaus**

$$a = 1$$

## K42

a)

	1	3	5
$f'(x)$	+	−	
$f(x)$	↗		↘

Suurimman arvon funktio saa kohdassa  $x = 3$ .

b)

	−2	0	3	5
$f'(x)$	−	+	−	
$f(x)$	↘	↗	↘	

Suurimman arvon funktio saa kohdassa  $x = -2$  tai kohdassa  $x = 3$ .

## K43

- a) Derivaattafunktion nollakohdat ovat  $x = -4$ ,  $x = -1$ ,  $x = 1$  ja  $x = 2$ .

Derivaattafunktion merkki positiivinen (kuvaaja  $x$ -akselin yläpuolella), kun  $-4 \leq x \leq -1$  tai  $1 \leq x \leq 2$ .

Derivaattafunktion merkki on negatiivinen (kuvaaja  $x$ -akselin alapuolella), kun  $x \leq -4$  tai  $-1 \leq x \leq 1$  tai  $x \geq 2$ .

Laaditaan funktion  $f$  kulkukaavio.

		-4		-1		1		2	
$f'$	-		+		-		+		-
$f$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$
		min		max		min		max	

Funktiolla  $f$  on minimikohdat  $x = -4$  ja  $x = 1$ .

Funktiolla  $f$  on maksimikohdat  $x = -1$  ja  $x = 2$ .

- b) Funktio  $f$  on aidosti kasvava välillä  $-4 \leq x \leq -1$ . Koska molemmat luvuista  $-3$  ja  $-2$  kuuluvat tälle välille, on funktion arvo  $f(-2)$  suurempi.

### Vastaus

- a) maksimikohdat  $x = -1$  ja  $x = 2$ ;  
 minimikohdat  $x = -4$  ja  $x = 1$   
 b)  $f(-2)$



## A1.

a)  $f(x) = -x^4 + 5x + 1$

$$f(3) = -3^4 + 5 \cdot 3 + 1 = -65$$

b)  $f'(x) = -4x^3 + 5 \cdot 1 + 0$   
 $= -4x^3 + 5$

$$f'(3) = -4 \cdot 3^3 + 5 = -103$$

### Vastaus

a)  $-65$

b)  $-103$

## A2.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad 6 - 4x &\leq x + 1 & | -6 - x \\ -4x - x &\leq 1 - 6 \\ -5x &\leq -5 & | :(-5) < 0 \\ x &\geq 1 \end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad -x^2 + 5x - 4 > 0$$

Ratkaistaan funktion  $f(x) = -x^2 + 5x - 4$  nollakohdat.

$$-x^2 + 5x - 4 = 0$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-4)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{-2} = \frac{-5 \pm 3}{-2}$$

$$x = \frac{-5 + 3}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-5 - 3}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4$$

**Tapa 1.** Päättellään funktion  $f(x) = -x^2 + 5x - 4$  merkit testaamalla.

Polynomifunktion  $f$  merkki voi vaihtua vain nollakohdissa 1 ja 4. Nollakohdat jakavat lukusuoran kolmeen osaan. Lasketaan kultakin osaväliltä yksi funktion  $f$  arvo.

$$f(0) = -0^2 + 5 \cdot 0 - 4 = -4 < 0 \quad -$$

$$f(2) = -2^2 + 5 \cdot 2 - 4 = 2 > 0 \quad +$$

$$f(5) = -5^2 + 5 \cdot 5 - 4 = -4 < 0 \quad -$$

Laaditaan funktion  $f$  merkkikaavio.

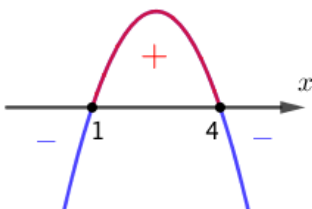
	1	4	
$f(x)$	-	+	-

Funktion  $f(x) = -x^2 + 5x - 4$  arvo on positiivinen, kun  $1 < x < 4$ .

Epäyhtälö  $-x^2 + 5x - 4 > 0$  toteutuu, kun  $1 < x < 4$ .

**Tapa 2.** Päätellään funktion  $f(x) = -x^2 + 5x - 4$  merkit kuvaajan avulla.

Funktion  $f(x) = -x^2 + 5x - 4$  kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, jonka nollakohdat ovat 1 ja 4.



Funktion  $f(x) = -x^2 + 5x - 4$  arvo on positiivinen, kun  $1 < x < 4$ .

Epäyhtälö  $-x^2 + 5x - 4 > 0$  toteutuu, kun  $1 < x < 4$ .

**Vastaus**

**a)**  $x \geq 1$

**b)**  $1 < x < 4$

### A3.

Määritetään funktion  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 17$  derivaatafunkti.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 2 \cdot 2x + 3 \cdot 1 + 0 \\ &= 3x^2 - 4x + 3 \end{aligned}$$

Määritetään kohdat, joissa derivaatta saa arvon 2.

$$f'(x) = 2$$

$$3x^2 - 4x + 3 = 2 \quad | -2$$

$$3x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{6} = \frac{4 \pm 2}{6}$$

$$x = \frac{4+2}{6} = \frac{6}{6} = 1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{4-2}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

### Vastaus

$$x = \frac{1}{3} \quad \text{ja} \quad x = 1$$

## A4.

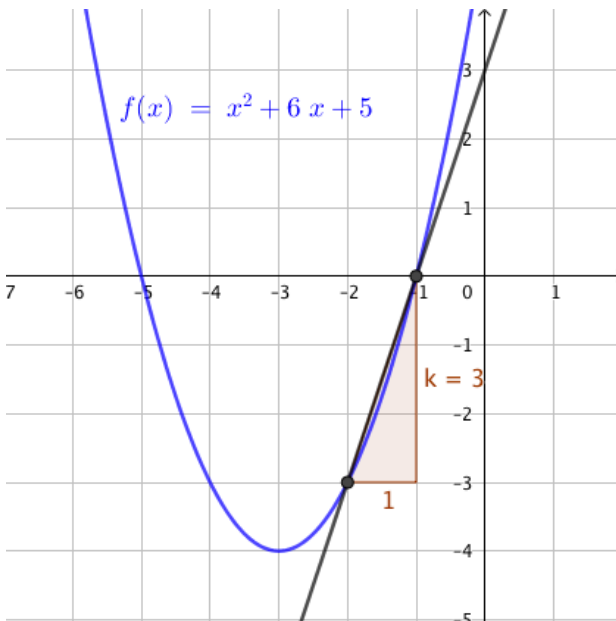
a) Tämä ratkaisu on tehty GeoGebraa käyttäen.

Piirretään funktion kuvaaja kirjoittamalla syöttökenttään

$$f(x) = x^2 + 6x + 5.$$

Lisätään kuvaajalle pisteet kohtiin  $x = -2$  ja  $x = -1$  kirjoittamalla syöttökenttään  $(-2, f(-2))$  ja  $(-1, f(-1))$ .

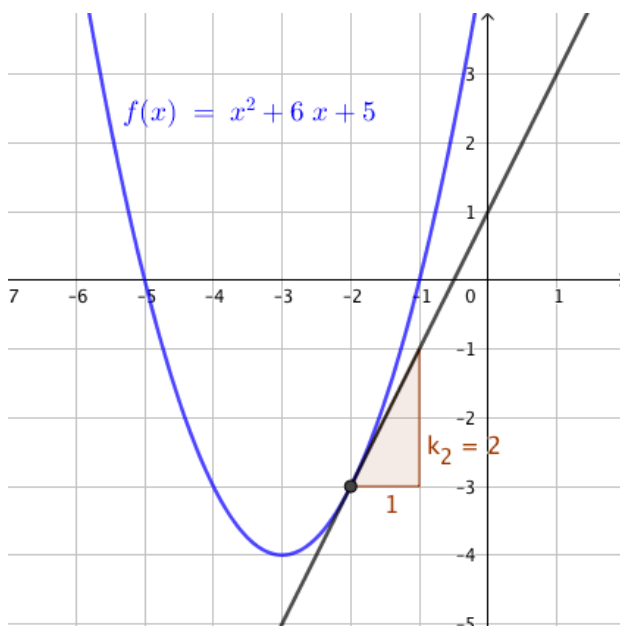
Piirretään pisteiden kautta suora ja määritetään sen kulmakerroin.



Funktion arvojen keskimääräinen muutosnopeus välillä  $-2 \leq x \leq -1$  on 3.

b) Lisätään kuvaajalle piste kohtaan  $x = -2$  kirjoittamalla syöttökenttään  $(-2, f(-2))$ .

Piirretään tähän pisteeseen tangenti käyttäen **Tangentit**-toimintoa.



Funktion arvojen hetkellinen muutosnopeus kohdassa  $x = -2$  on 2.

**Vastaus**

- a) 3
- b) 2

## A5.

- a) Lasketaan funktion  $m(t) = -0,0032t^3 + 0,072t^2$  arvot hetkillä  $t = 6$  ja  $t = 15$ .

$$m(6) = -0,0032 \cdot 6^3 + 0,072 \cdot 6^2 \approx 1,9 \text{ (g)}$$

$$m(15) = -0,0032 \cdot 15^3 + 0,072 \cdot 15^2 \approx 5,4 \text{ (g)}$$

Kasvin paino 6 viikon kuluttua on 1,9 g ja 15 viikon kuluttua 5,4 g.

- b) Kasvin painon muutosnopeuden ilmaisee funktion  $m(t)$  derivaattafunktio  $m'(t)$ .

$$m(t) = -0,0032t^3 + 0,072t^2 \quad \text{Derivoidaan CAS-laskimella.}$$

$$m'(t) = -0,0096t^2 + 0,144t$$

Lasketaan derivaattafunktion arvot hetkillä  $t = 6$  ja  $t = 15$ .

$$m'(6) = -0,0096 \cdot 6^2 + 0,144 \cdot 6 \approx 0,52 \text{ (g / viikko)}$$

$$m'(15) = -0,0096 \cdot 15^2 + 0,144 \cdot 15 \approx 0 \text{ (g / viikko)}$$

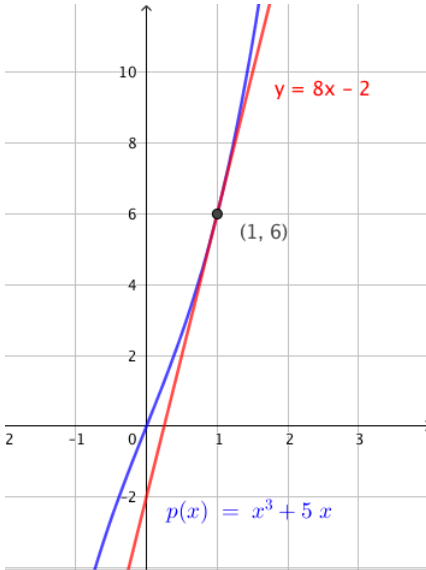
Kasvin paino kasvaa 6 viikon kuluttua nopeudella 0,52 g/viikko ja 15 viikon kuluttua nopeudella 0 g/viikko.

### Vastaus

- a) 1,9 g ja 5,4 g  
b) 0,52 g/viikko ja 0 g/viikko

## A6.

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä kuva geometriaohjelmalla.



Lasketaan funktion  $p$  kuvaajan pisteen  $y$ -koordinaatti kohdassa  $x = 1$ .

$$p(x) = x^3 + 5x$$

$$p(1) = 1^3 + 5 \cdot 1 = 6$$

Tangentti kulkee pisteen  $(1, 6)$  kautta.

Määritetään funktion  $p$  derivaatta kohdassa  $x = 1$ .

$$p'(x) = 3x^2 + 5$$

$$p(1) = 3 \cdot 1^1 + 5 = 8$$

Tangentin kulmakerroin on 8.

Muodostetaan tangentin yhtälö.



$$y - 6 = 8(x - 1)$$

$$y - 6 = 8x - 8$$

$$y = 8x - 2$$

**Vastaus**

$$y = 8x - 2$$

## A7.

- a) Funktion kulku päätellään derivaattafunktion merkeistä.  
Määritetään derivaattafunktio.

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x$$

Derivoidaan CAS-laskimella.

$$f'(x) = x^2 + x - 2$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$x^2 + x - 2 = 0$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = -2 \quad \text{tai} \quad x = 1$$

Derivaattafunktion  $f'$  merkki voi vaihtua vain nollakohdissa  $-2$  ja  $1$ . Päätellään derivaattafunktion  $f'$  merkit testaamalla.




$$f'(x) = x^2 + x - 2$$

$$f'(-3) = 4 > 0 \quad +$$

$$f'(0) = -2 < 0 \quad -$$

$$f'(2) = 4 > 0 \quad +$$

Laaditaan kulkukaavio.

	-2	1	
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$			
	max	min	

Funktio  $f$  on kasvava väleillä  $x \leq -2$  ja  $x \geq 1$   
ja vähenevä välillä  $-2 \leq x \leq 1$ .

- b) Funktion  $f$  maksimiarvo on

$$f(-2) = \frac{1}{3} \cdot (-2)^3 + \frac{1}{2} \cdot (-2)^2 - 2 \cdot (-2) = \frac{10}{3}$$

ja minimiarvo

$$f(1) = \frac{1}{3} \cdot 1^3 + \frac{1}{2} \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 = -\frac{7}{6}.$$

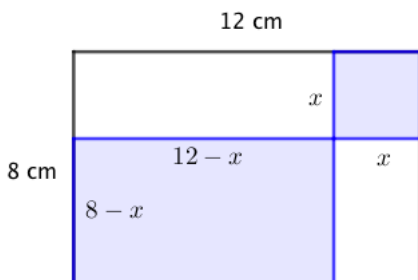
### **Vastaus**

**a)** kasvava välillä  $x \leq -2$  ja välillä  $x \geq 1$ , vähenevä välillä  $-2 \leq x \leq 1$

**b)** maksimiarvo  $f(-2) = \frac{10}{3}$ , minimiarvo  $f(1) = -\frac{7}{6}$

## A8.

Käytetään kuvan merkintöjä.



Muodostetaan funktio, joka ilmaisee tummennettujen osien pinta-alan.

$$\begin{aligned} A(x) &= (12 - x)(8 - x) + x \cdot x && \text{Sievennetään CAS-laskimella.} \\ &= 2x^2 - 20x + 96 \end{aligned}$$

Neliön sivun pituuden  $x$  on oltava epänegatiivinen ja toisaalta mahdollista suorakulmion sisään. Siten  $0 \leq x \leq 8$ .

On siis määritettävä funktion  $A$  pienin arvo välillä  $0 \leq x \leq 8$ .

Määritellään laskimeen funktio  $A(x) = 2x^2 - 20x + 96$ .

Määritetään laskimen Min-komennolla väliltä  $0 \leq x \leq 8$  kohta, jossa funktion  $A$  arvo on pienin.

$\text{Min}(A, 0, 8)$

$\text{fMin}(A(x), x, 0, 8)$

Laskin antaa kohdaksi  $x = 5$ .

Tummenettujen osien pinta-ala on pienin kun neliön sivun pituus on 5 cm.

**Vastaus**

5 cm

## A9.

- a) Kauppias maksaa kahvipaketista 3,80 euroa. Jos kahvipaketin myyntihinta on 5,00 euroa, kauppias saa yhdeltä paketilta voittoa 1,20 euroa.

Jos kahvipaketin myyntihinta nousee  $0,10x$  euroa, kauppias saa yhdeltä paketilta voittoa  $1,20 + 0,10x$  euroa.

Kootaan tiedot taulukkoon.

	<b>Voitto (€)</b>	<b>Myynti (kpl)</b>	<b>Päivämyynnin voitto (€)</b>
<b>Alussa</b>	1,20	240	$1,20 \cdot 240$
<b>Muutoksen jälkeen</b>	$1,20 + 0,10x$	$240 - 15x$	$(1,20 + 0,10x)(240 - 15x)$

Muodostetaan funktio, joka ilmaisee päivämyynnin voiton euroina.

$$\begin{aligned} f(x) &= (1,20 + 0,10x)(240 - 15x) && \text{Sievennetään CAS-laskimella.} \\ &= -1,5x^2 + 6x + 288 \end{aligned}$$

Voiton ja myynnin on oltava epänegatiivisia. Päätellään tämän perusteella funktion  $f$  määrittelyehto.

$$\begin{aligned} 1,20 + 0,10x &\geq 0 && \text{ja} && 240 - 15x &\geq 0 && \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \\ x &\geq -12 && && x &\leq 16 \end{aligned}$$

On siis määritettävä funktion  $f$  suurin arvo välillä  $-12 \leq x \leq 16$ .

Määritellään laskimeen funktio  $f(x) = -1,5x^2 + 6x + 288$ .

Määritetään laskimen Max-komennolla väliltä  $-12 \leq x \leq 16$  kohta, jossa funktion  $f$  arvo on suurin.

$$\begin{aligned} &\text{Max}(f, -12, 16) \\ &f\text{Max}(f(x), x, -12, 16) \end{aligned}$$

Laskin antaa kohdaksi  $x = 2$ .

Funktion  $f$  suurin arvo on  $f(2) = 294$ .

Päivämyynnistä saatava voitto on siis 294 euroa.

Lasketaan kahvipaketin myyntihinta. Hinta nousi  $0,10x$  euroa, joten myyntihinta on  $5,00 + 0,10 \cdot 2 = 5,20$  euroa.

- b) Kauppias maksaa kahvipaketista 3,40 euroa. Jos kahvipaketin myyntihinta on 5,00 euroa, kauppias saa yhdeltä paketilta voittoa 1,60 euroa.

	<b>Voitto (€)</b>	<b>Myynti (kpl)</b>	<b>Päivämyynnin voitto (€)</b>
<b>Alussa</b>	1,60	240	$1,60 \cdot 240$
<b>Muutoksen jälkeen</b>	$1,60 + 0,10x$	$240 - 15x$	$(1,60 + 0,10x)(240 - 15x)$

Muodostetaan funktio, joka ilmaisee päivämyynnin voiton euroina.

$$\begin{aligned} f(x) &= (1,60 + 0,10x)(240 - 15x) && \text{Sievennetään CAS-laskimella.} \\ &= -1,5x^2 + 384 \end{aligned}$$

Voiton ja myynnin on oltava epänegatiivisia. Päätellään tämän perusteella funktion  $f$  määrittelyehto.

$$\begin{aligned} 1,60 + 0,10x &\geq 0 && \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \\ x &\geq -16 \end{aligned}$$

On siis määritettävä funktion  $f$  suurin arvo välillä  $-16 \leq x \leq 16$ .

Määritellään laskimeen funktio  $f(x) = -1,5x^2 + 384$ .

Määritetään laskimen Max-komennolla väliltä  $-16 \leq x \leq 16$  kohta, jossa funktion  $f$  arvo on suurin.

$$\begin{aligned} &\text{Max}(f, -16, 16) \\ &f\text{Max}(f(x), x, -16, 16) \end{aligned}$$

Laskin antaa kohdaksi  $x = 0$ .

Funktion  $f$  suurin arvo on  $f(0) = 384$ .

Päivämyynnistä saatava voitto on siis 384 euroa.

Lasketaan kahvipaketin myyntihinta. Hinta nousi  $0,10x$  euroa, joten myyntihinta on  $5,00 + 0,10 \cdot 0 = 5,00$  euroa.

**Vastaus**

**a)** hinta 5,20 euroa, voitto 294 euroa

**b)** 5,00 euro

## A10.

Funktion kulku päätellään derivaattafunktion merkeistä.  
Määritetään derivaattafunktio.

$$\begin{aligned}f(x) &= x^3 - 9x^2 + 15x + a \\f'(x) &= 3x^2 - 9 \cdot 2x + 15 \cdot 1 + 0 \\&= 3x^2 - 18x + 15\end{aligned}$$




Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\begin{aligned}3x^2 - 18x + 15 &= 0 \\x &= \frac{-(-18) \pm \sqrt{(-18)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 15}}{2 \cdot 3} = \frac{18 \pm \sqrt{144}}{6} = \frac{18 \pm 12}{6} \\x &= \frac{18+12}{6} = 5 \quad \text{tai} \quad x = \frac{18-12}{6} = 1\end{aligned}$$

Derivaattafunktion  $f'$  merkki voi vaihtua vain nollakohdissa 1 ja 5. Päätellään derivaattafunktion  $f'$  merkit testaamalla.

$$\begin{aligned}f'(x) &= 3x^2 - 18x + 15 \\f'(0) &= 15 > 0 \quad + \\f'(2) &= -9 < 0 \quad - \\f'(6) &= 15 > 0 \quad +\end{aligned}$$

Laaditaan kulkukaavio.

	1	5	
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$			
	max	min	

Funktion maksimarvo on



$$f(1) = 1^3 - 9 \cdot 1^2 + 15 \cdot 1 + a = 7 + a.$$

Toisaalta maksimiaron tulee olla 10. Ratkaistaan vakio  $a$ .

$$7 + a = 10 \quad | -7$$

$$a = 3$$

Funktion minimiarvo on

$$f(5) = 5^3 - 9 \cdot 5^2 + 15 \cdot 5 + 3 = -22.$$

**Vastaus**

-22

## B1.

a) **Tapa 1.** Käytetään tulon nollasääntöä.

$$(x + 3)(2x - 1) = 0$$

$$x + 3 = 0 \quad \text{tai} \quad 2x - 1 = 0$$

$$x = -3 \qquad 2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

**Tapa 2.** Käytetään ratkaisukaavaa.

Sievennetään funktion lauseke.

$$f(x) = (x + 3)(2x - 1)$$

$$= 2x^2 - x + 6x - 3$$

$$= 2x^2 + 5x - 3$$

Ratkaistaan funktion nollakohdat.

$$2x^2 + 5x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{-5 \pm 7}{4}$$

$$x = \frac{-5 + 7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-5 - 7}{4} = \frac{-12}{4} = -3$$

b) Sievennetään funktion lauseke.

$$f(x) = (x + 3)(2x - 1)$$

$$= 2x^2 - x + 6x - 3$$

$$= 2x^2 + 5x - 3$$

Määritetään derivaattafunktio.

$$\begin{aligned}f'(x) &= 2 \cdot 2x + 5 \cdot 1 - 0 \\&= 4x + 5\end{aligned}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\begin{aligned}4x + 5 &= 0 \\4x &= -5 \\x &= -\frac{5}{4}\end{aligned}$$

**Vastaus**

**a)**  $x = -3$  tai  $x = \frac{1}{2}$

**b)**  $x = -\frac{5}{4}$

## B2.

a)  $f(x) > 0$

$$\begin{array}{l} 5 - x > 0 \quad | -5 \\ -x > -5 \quad | :(-1) < 0 \\ x < 5 \end{array}$$

b) Ratkaistaan funktion  $f(x) = x^2 - 8x + 12$  nollakohdat.

$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2}$$

$$x = \frac{8+4}{2} = 6 \quad \text{tai} \quad x = \frac{8-4}{2} = 2$$

**Tapa 1.** Päätellään funktion  $f(x) = x^2 - 8x + 12$  merkit testaamalla.

Polynomifunktion  $f$  merkki voi vaihtua vain nollakohdissa 2 ja 6. Nollakohdat jakavat lukusuoran kolmeen osaan. Lasketaan kultakin osaväliltä yksi funktion  $f$  arvo.

$$f(0) = 0^2 - 8 \cdot 0 + 12 = 12 > 0 \quad +$$

$$f(3) = 3^2 - 8 \cdot 3 + 12 = -1 < 0 \quad -$$

$$f(10) = 10^2 - 8 \cdot 10 + 12 = 32 > 0 \quad +$$

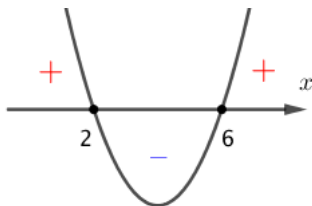
Laaditaan funktion  $f$  merkkikaavio.

	2	6	
$f(x)$	+	-	+

Funktion  $f(x) = x^2 - 8x + 12$  arvo on positiivinen, kun  $x < 2$  tai  $x > 6$ .

**Tapa 2.** Päättellään funktion  $f(x) = x^2 - 8x + 12$  merkit kuvaajan avulla.

Funktion  $f(x) = x^2 - 8x + 12$  kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, jonka nollakohdat ovat 2 ja 6.



Funktion  $f(x) = x^2 - 8x + 12$  arvo on positiivinen, kun  $x < 2$  tai  $x > 6$ .

**Vastaus**

a)  $x < 5$

b)  $x < 2$  tai  $x > 6$

### B3.

Polynomifunktio  $f(x) = -x^3 - 9x^2 + 60$  saa suljetulla välillä  $-9 \leq x \leq -1$  suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

Määritetään derivaattafunktio.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -3x^2 - 9 \cdot 2x + 0 \\ &= -3x^2 - 18x \end{aligned}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ -3x^2 - 18x &= 0 \\ -3x(x + 6) &= 0 \\ -3x = 0 \quad \text{tai} \quad x + 6 &= 0 \\ x = 0 \quad \quad \quad x &= -6 \end{aligned}$$

Vain nollakohta  $x = -6$  kuuluu välille  $-9 \leq x \leq -1$ .

Lasketaan funktion  $f$  arvo välin päätepisteissä ja välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^3 - 9x^2 + 60 \\ f(-9) &= -(-9)^3 - 9 \cdot (-9)^2 + 60 = 60 \quad \text{suurin} \\ f(-1) &= -(-1)^3 - 9 \cdot (-1)^2 + 60 = 50 \\ f(-6) &= -(-6)^3 - 9 \cdot (-6)^2 + 60 = -48 \quad \text{pienin} \end{aligned}$$

Välillä  $-9 \leq x \leq -1$  funktion  $f$  suurin arvo on 60 ja pienin arvo -48.

#### Vastaus

suurin arvo 60, pienin arvo -48

## B4.

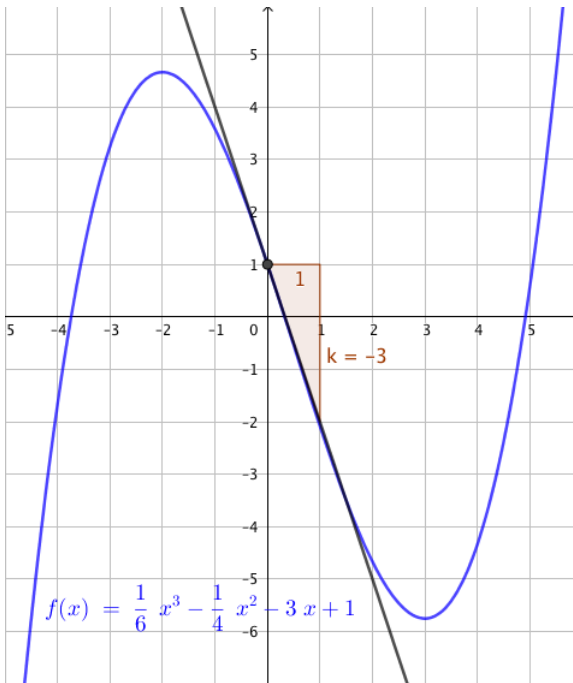
a) Tämä ratkaisu on tehty GeoGebraa käyttäen.

Piirretään funktion kuvaaja kirjoittamalla syöttökenttään

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - 3x + 1.$$

Lisätään kuvaajalle piste kohtaan  $x = 0$  kirjoittamalla syöttökenttään  $(0, f(0))$ .

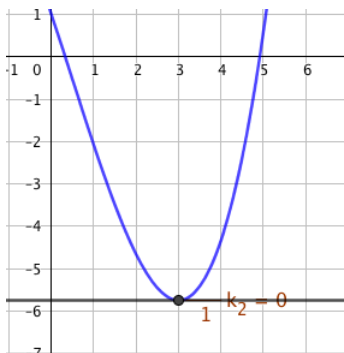
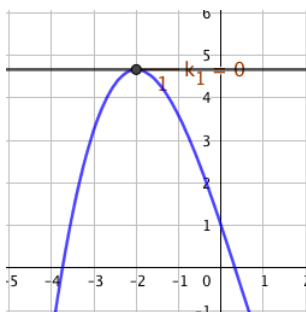
Piirretään tähän pisteeseen tangenti käyttäen **Tangentit**-toimintoa. Määritetään tangentin kulmakerron **Kulmakerroin**-toiminnolla.



Funktion  $f$  derivaatta kohdassa 0 on  $-3$ .

b) Lisätään funktion kuvaajalle liikuteltava piste **Piste objektilla**-toiminnolla. Piirretään tähän pisteeseen tangenti ja määritetään sen kulmakerroin.

Liikutetaan pistettä pitkin kuvaajaa kohtaan, jossa tangentin kulmakerroin on nolla.



Funktion  $f$  derivaatta on nolla kohdissa  $x = -2$  ja  $x = 3$ .

### Vastaus

a)  $f'(0) = -3$

b)  $x = -2$  ja  $x = 3$



## B5.

Funktion kulku päätellään derivaattafunktion merkeistä.  
Määritetään derivaattafunktio.

$$f(x) = x^3 + x^2 - 8x + 1000\,000\,000 \quad \text{Derivoidaan CAS-laskimella.}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 8$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$3x^2 + 2x - 8 = 0$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = -2 \quad \text{tai} \quad x = \frac{4}{3}$$

Derivaattafunktion  $f'$  merkki voi vaihtua vain nollakohdissa  $-2$  ja  $\frac{4}{3}$ . Päätellään derivaattafunktion  $f'$  merkit testaamalla.




$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 8$$

$$f'(-3) = 13 > 0 \quad +$$

$$f'(0) = -8 < 0 \quad -$$

$$f'(2) = 8 > 0 \quad +$$

Laaditaan kulkukaavio.

	$\frac{4}{3}$		
	$-2$		
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$			
	max	min	

Funktio  $f$  on aidosti kasvava välillä  $x \leq -2$  ja välillä  $x \geq \frac{4}{3}$  ja aidosti vähenevä välillä  $-2 \leq x \leq \frac{4}{3}$ .

Luvut  $-1,999\,998$  ja  $-1,999\,997$  kuuluvat välille  $-2 \leq x \leq \frac{4}{3}$ , missä funktio  $f$  on aidosti vähenevä.

Koska  $-1,999\,998$  on pienempi kuin  $-1,999\,997$ , niin  $f(-1,999\,998)$  on suurempi kuin  $f(-1,999\,997)$ .

### **Vastaus**

aidosti kasvava välillä  $x \leq -2$  ja välillä  $x \geq \frac{4}{3}$ ,

aidosti vähenevä välillä  $-2 \leq x \leq \frac{4}{3}$ ;

$f(-1,999\,998)$  on suurempi

## B6.

Paraabeli  $y = -x^2 + bx + c$  on funktion  $f(x) = -x^2 + bx + c$  kuvaaja.

Funktion  $f$  derivaatta on nolla paraabelin huipun kohdalla.

Paraabelin huippu on pisteessä  $(2, 1)$ , joten  $f'(2) = 0$ .

Määritetään derivaattafunktio.

$$f'(x) = -2x + b$$

Ratkaistaan vakio  $b$ .

$$f'(2) = 0$$

$$-2 \cdot 2 + b = 0$$

$$b = 4$$

[Ratkaistaan CAS-laskimella](#)

Siis  $f(x) = -x^2 + 4x + c$ .

Paraabelin huippu on pisteessä  $(2, 1)$ , joten  $f(2) = 1$ .

Ratkaistaan vakio  $c$ .

$$f(2) = 1$$

$$-2^2 + 4 \cdot 2 + c = 1$$

$$c = -3$$

[Ratkaistaan CAS-laskimella.](#)

**Vastaus**

$$b = 4 \text{ ja } c = -3$$

## B7.

Olkoon  $x > 0$ . Tehtävänä on määrittää funktion

$$f(x) = 10 + x^2 - x^3$$

suurin mahdollinen arvo.

Funktion kulku päätellään derivaattafunktion merkeistä.  
Määritetään derivaattafunktio.

$$f'(x) = 2x - 3x^2$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$2x - 3x^2 = 0$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = \frac{2}{3}$$

Derivaattafunktion  $f'$  merkki voi vaihtua vain nollakohdissa

0 ja  $\frac{2}{3}$ . Päätellään derivaattafunktion  $f'$  merkit testaamalla.




$$f'(x) = 2x - 3x^2$$

$$f'(-1) = -5 < 0 \quad -$$

$$f'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} > 0 \quad +$$

$$f'(1) = -1 < 0 \quad -$$

Laaditaan kulkukaavio.

	0	$\frac{2}{3}$	
$f'(x)$	-	+	-
$f(x)$			

Funktion  $f$  suurin arvo on  $f\left(\frac{2}{3}\right) = 10 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{274}{27}$ .

**Vastaus**

$$\frac{274}{27}$$

## B8.

- a) Huoltoasema maksaa kanisterista 3,50 euroa. Jos kanisterin myyntihinta on 9,90 euroa, huoltoasema saa yhdeltä kanisterilta voittoa 6,40 euroa.

Myyntihintaan 9,90 euroa sisältyy kaksi 50 sentin suuruista hinnankorotusta. Viikkomyynti on  $760 - 2 \cdot 35 = 690$  kanisteria. Viikkomyynnin voitto on  $6,40 \cdot 690 = 4416$  euroa.

- b) Huoltoasema maksaa kanisterista 3,50 euroa. Jos kanisterin myyntihinta on 8,90 euroa, huoltoasema saa yhdeltä kanisterilta voittoa 5,40 euroa.

Jos kanisterin myyntihinta nousee  $0,50x$  euroa, huoltoasema saa yhdeltä kanisterilta voittoa  $5,40 + 0,50x$  euroa.

	<b>Voitto (€)</b>	<b>Viikko- myynti (kpl)</b>	<b>Viikkomyynnin voitto (€)</b>
<b>Alussa</b>	5,40	760	$5,40 \cdot 760$
<b>Muutoksen jälkeen</b>	$5,40 + 0,50x$	$760 - 35x$	$(5,40 + 0,50x)(760 - 35x)$

Muodostetaan funktio, joka ilmaisee viikkomyynnin voiton euroina.

$$\begin{aligned} f(x) &= (5,40 + 0,50x)(760 - 35x) && \text{Sievennetään CAS-laskimella.} \\ &= -17,5x^2 + 191x + 4104 \end{aligned}$$

Voiton ja myynnin on oltava epänegatiivisia. Päätellään tämän perusteella funktion  $f$  määrittelyehto.

$$\begin{aligned} 5,40 + 0,50x &\geq 0 && \text{ja} && 760 - 35x &\geq 0 \\ x &\geq -10,8 && && x &\leq 21,7 \end{aligned}$$

- c) On määritettävä funktion  $f$  suurin arvo välillä  $-10,8 \leq x \leq 21,7$ .

Määritellään laskimeen funktio  $f(x) = -17,5x^2 + 191x + 4104$ .

Määritetään laskimen Max-komennolla väliltä  $-10,8 \leq x \leq 21,7$  kohta, jossa funktion  $f$  arvo on suurin.

$\text{Max}(f, -10.8, 21.7)$   
 $f\text{Max}(f(x), x, -10.8, 21.7)$

Laskin antaa kohdaksi  $x \approx 5,457$ .

Lasketaan kanisterin myyntihinta. Hinta nousi  $0,50x$  euroa, joten myyntihinta on  $8,90 + 0,50 \cdot 5,457 \approx 11,60$  euroa.

### Vastaus

a) 4416 euroa

b)  $f(x) = (5,40 + 0,50x)(760 - 35x)$   
 $= -17,5x^2 + 191x + 4104$

c) 11,60 euroa

## B9.

Merkitään päätyneliön sivun pituutta metreinä kirjaimella  $x$  ja vajan pituutta kirjaimella  $y$ .

Kiskoa on 72 m. Ratkaistaan muuttujan  $y$  lauseke.

$$6x + 4y = 72$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$y = 18 - 1,5x$$

Muodostetaan funktio, joka ilmaisee vajan tilavuuden.

$$V(x) = x \cdot x \cdot y$$

$$y = 18 - 1,5x$$

$$= x^2(18 - 1,5x)$$

Sievennetään CAS-laskimella.

$$= 18x^2 - 1,5x^3$$

Sivujen pituuksien on oltava epänegatiivinen. Päätellään tämän perusteella funktion  $V$  määrittelyehto.

$$x \geq 0 \quad \text{ja} \quad y \geq 0$$

$$y = 18 - 1,5x$$

$$18 - 1,5x \geq 0$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x \leq 12$$

On siis määritettävä funktion  $V$  suurin arvo välillä  $0 \leq x \leq 12$ .

Määritellään laskimeen funktio  $V(x) = 18x^2 - 1,5x^3$ .

Määritetään laskimen Max-komennolla väliltä  $0 \leq x \leq 12$  kohta, jossa funktion  $A$  arvo on suurin.

$$\text{Max}(V, 0, 12)$$

$$\text{fMax}(V(x), x, 0, 12)$$

Laskin antaa kohdaksi  $x = 8$ .

Funktion  $V$  suurin arvo on  $V(8) = 384$ .

Lasketaan muuttuja  $y$ .



$$y = 18 - 1,5x = 18 - 1,5 \cdot 8 = 6$$

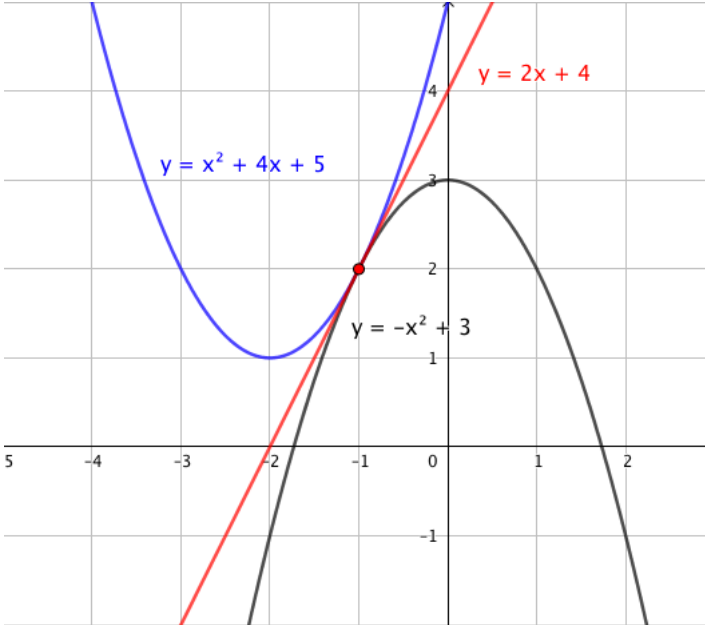
Vajan päätyneliön sivun pituus on 8 m ja vajan pituus on 6 m.  
Vajan tilavuus on  $384 \text{ m}^3$ .

**Vastaus**

päätyneliön sivun pituus 8 m,  
vajan pituus on 6 m,  
vajan tilavuus  $384 \text{ m}^3$

## B10.

Hahmotellaan tilannetta piirtämällä kuva geometriaohjelmalla.



Ratkaistaan käyrien leikkauspisteen  $x$ -koordinaatti.

$$x^2 + 4x + 5 = -x^2 + 3$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = -1$$

Koska yhtälöllä on vain yksi ratkaisu, käyrillä on vain yksi yhteinen piste.

Lasketaan leikkauspisteen  $y$ -koordinaatti.

$$y = x^2 + 4x + 5 = (-1)^2 + 4 \cdot (-1) + 5 = 2$$

Käyrien leikkauspiste on  $(-1, 2)$ .

Leikkauspisteeseen piirretyn tangentin kulmakerroin on funktion

$$f(x) = x^2 + 4x + 5 \text{ derivaatta kohdassa } -1.$$

$$f'(x) = 2x + 4$$

$$f'(-1) = 2 \cdot (-1) + 4 = 2$$

Tangentin kulmakerroin on 2.

Muodostetaan tangentin yhtälö.

$$y - 2 = 2(x - (-1))$$

$$y = 2x + 4$$

Ratkaistaan  $y$  CAS-laskimella.

**Vastaus**

$$y = 2x + 4$$